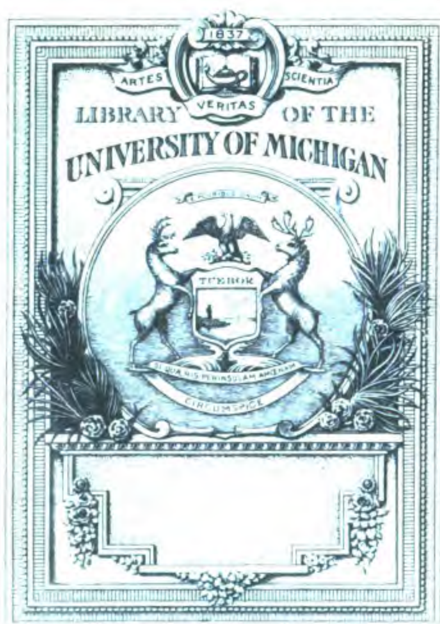

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE





Francisci Josephi
Ex Libris ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~adore

LES

ELEMENS D'EUCLIDE

EXPLIQUEZ D'UNE MANIERE nouvelle & très-facile, avec l'usage de chaque Proposition pour toutes les parties de Mathematiques.

Par le P. DECHALLES, *de la Compagnie de* JESUS.

NOUVELLE EDITION.

Revûë, corrigée & augmentée par M. OZANAM, *de l'Academie Royale des Sciences.*



A PARIS, RUE S. JACQUES.

Chez C. A. JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Genie, à l'Image Notre-Dame.

M. D. CC. XXXVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roy.

Hist. of Sci.
Vaugeois
4-7-24
9984



AVANT-PROPOS.

AYANT remarqué depuis long-tems, que la plûpart de ceux qui apprennent les Elemens d'Euclide, s'en dégoûtent fort ſouvent, pour ne pas ſçavoir à quoi ſervent des Propoſitions ſi peu conſiderables en apparence, & néanmoins ſi utiles; j'ai crû qu'il ſeroit très-à-propos, non-ſeulement de les rendre les plus faciles qu'on pourroit; mais encore d'ajoûter quelques petits uſages, après chaque Propoſition, qui en fiſſent voir l'utilité. C'eſt ce qui m'a obligé de changer quelques démonſtrations, que j'ai jugé trop embarraſſées, & au-delà de la portée ordinaire des Commençans, & d'en ſubſtituer quelques autres plus intelligibles. C'eſt pour la même rai-

ſon que j'ai démontré le cinquiéme Livre d'une Methode beaucoup plus claire, que celle qui ſe ſert des équimultiples. Je n'ai pas mis tous les uſages des Propoſitions, parce qu'il eût été néceſſaire pour cela de rapporter toutes les Mathematiques, ce qui rendroit le Livre, & trop gros & trop difficile. Je me ſuis contenté d'en choiſir quelques-uns des plus clairs & des plus aiſés à concevoir, pour marquer leur utilité. Je ne prétens pas qu'on s'y arrête beaucoup, ni qu'on les entende parfaitement; puiſqu'ils dépendent des principes des autres parties; c'eſt pourquoi je les ai diſtinguées par le caractere Italique. Voilà le deſſëin de ce petit Ouvrage, que je donne volontiers au Public dans un temps auquel on s'adonne aux Mathematiques, plus qu'on n'a jamais fait.

APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux, *les Elemens d'Euclide*, ajustés à la portée des Commençans en Géometrie, par le Pere Dechalles, & revûs par M. Ozanam. Fait à Paris le 28. Avril 1720. VARIGNON.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu, Roy de France & de Navarre : A nos amés & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requestes ordinaires de notre Hôtel, grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé CLAUDE JOMBERT Libraire à Paris ; Nous ayant fait remontrer qu'il souhaiteroit faire imprimer & donner au Public, un Ouvrage qui a pour titre, *les Ouvres de feu M. Ozanam contenant le Dictionaire, le Cours, les Récréations Mathematiques, l'usage du Compas, un Traité de l'Arpentage, la Géometrie Pratique, & les Elemens d'Euclide*: S'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de privilege, sur ce nécessaires : A CES CAUSES voulant favorablement traiter l'Exposant ; Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer lesdits Ouvrages, en tels Volumes, forme, marge, caractere, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire

vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de quinze années consécutives, à compter du jour de la datte desdites présentes : Faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéïssance, comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire lesdits Livres ci-dessus expliqués en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre, ou autrement sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts ; à la charge que ces Présentes seront entegistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, & ce dans trois mois de la datte d'icelles ; que l'impression de ces Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier, & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie ; & qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Livres ci-dessus specifiés, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur de Voyer de Paulmi Marquis d'Argenson, Chancelier & Garde des Sceaux de notre Ordre Militaire de Saint Louis ; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre

Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le Sieur de Voyer de Paulmi, Marquis d'Argenson, Chancelier & Garde des Sceaux de notre Ordre Militaire de Saint Louis, le tout à peine de nullité des Présentes : Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Exposant ou ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Livres soit tenuë pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoûtée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous Actes requis & nécessaires sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. DONNE' à Paris le dixiéme jour du mois de May l'an de grace mil sept cens vingt, & de notre Regne le cinquiéme. Par le Roy en son Conseil. DE S. HILAIRE.

Registré sur le Registre IV. de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, page 154. N. 635. conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrêt du Conseil du 13. Août 1703. A Paris le 15. May 1720. DELAULNE, Syndic.

CATALOGUE DES PRINCIPAUX Livres qui se trouvent dans la même Boutique.

ARchitecture de Palladio, où l'on traite des cinq Ordres, des Temples, des Bâtimens publics, des Escaliers, des Ponts, des grands Chemins & des autres Edifices des Anciens, traduit par J. Leoni, avec les belles figures de Bernard Picart, nouvelle Edition *in-folio*, en deux vol. grand papier, à la Haye 1726. 60 liv.

Architecture de Scamozzy, contenant les regles des cinq Ordres, avec la Description de plusieurs Maisons publiques & particulieres, suivant la maniere des Anciens; le tout enrichi des plus beaux Edifices de Rome, *in-folio*, la Haye, 18 liv.

Paralelle de l'Architecture antique avec la moderne, suivant les dix principaux Auteurs qui ont traité des cinq Ordres comparez entr'eux, par M. de Chambray, *in-folio*, belle Edition avec les planches originales, 20 liv.

——Le même, derniere Edition augmentée des Piédestaux pour chaque Ordre, *in-folio*, avec le discours gravé;

le tout en cent planches, 10 l.

Maniere de dessiner les cinq Ordres & les parties qui en dépendent, d'après l'antique, par Ab. Bosse, *in-folio*, en plus de cent planches, 15 l.

L'Art de bien Bâtir, par M. le Muet, Architecte du Roy, *in-folio*, en cent planches, 12 l.

Les Oeuvres d'Architecture d'Antoine le Pautre, Architecte du Roy, contenant la Description de plusieurs Châteaux, Eglises, Portes de Ville, Fontaines, &c. de la composition de l'Auteur, *in-folio*, avec soixante planches, 15 l.

Traité de Perspectiv pratique, avec des remarques sur l'Architecture en général, par M. Courtonne, Architecte du Roy, *in-folio*, avec quantité de planches, 12 l.

Architecture Moderne, ou l'Art de bien bâtir pour toutes sortes de personnes, *in-quarto*, deux volumes grand papier, avec cent cinquante planches qui représentent les plans & Elévations de 60. distributions différentes, 30 l.

Suite. De la Décoration extérieure & intérieure des Edifices modernes, & de la Distribution des Maisons de plaisance, Ouvrage dans lequel on trouvera un détail exact de tout ce qui a rapport à la distribution des Parcs & Jardins de pro-

preté; au Jardinage, à la Sculpture, à la Serrurerie & la Menuiserie, & à la Décoration des Appartemens de parade, par Jacques-François Blondel, enrichi de Vignettes, Lettres grises, Fleurons & culs de Lampe, exécutés par les plus habiles Graveurs; & de 155 planches dessinées & gravées dans la derniere perfection, deux vol. *in-quarto*, grand papier, 42 l.

Traité de Stereotomie, ou la Théorie & la Pratique de la coupe des pierres & des bois, par M. Frezier, Ingénieur en chef à Landau, *in-quarto*, en 3. vol. avec quantité de figures, Strasbourg 1738. *le 3e vol. est sous presse*, 40 l.

La Pratique du Trait pour la coupe des pierres, du Sieur Desargues, par Ab. Bosse, *in-octavo*, avec 117 pl. 6 l.

Nouveau Cours de Mathématique appliqué à l'usage de la Guerre, par M. de Belidor, Commissaire Provincial d'Artillerie & Professeur Royal de Mathématique à l'Ecole de la Fére, *in-quarto*, 1725. avec 34. planches qui sortent, 15 l.

Item. La Science des Ingénieurs dans la conduite des travaux de Fortification, & d'Architecture civile, *in-quarto*, grand papier, avec 53 planches, 24 l.

Idem, *suite*. Architecture Hydraulique ou l'Art de conduire, d'élever & de ménager les Eaux pour tous les besoins de la vie. Premiere partie, qui contient le détail des Pompes, Soupapes, Pistons, Roües à eaux, Chapelets, & généralement de toutes les machines qui servent à élever l'eau, soit par le moyen d'une chûte ou d'un courant, soit par celui du vent ou du feu, soit enfin par le moyen des hommes ou des animaux; *in-quarto*, grand papier, en 2. vol. avec près de 100 planches. *Le second volume est sous presse, & paroîtra au mois de Décembre*, 40 l.

Christ. Wolfii Matheseos universæ Elementa, *in-quarto*, en 4. vol. Geneve; le quatriéme vol. est sous presse, 54 l.

Récréations Mathématiques & Physiques par M. Ozanam, où l'on trouve plusieurs Problêmes curieux d'Arithmetique, de Géometrie, d'Optique, de Mécanique, de Gnomonique, de Cosmographie & de Physique, avec un Traité des Horloges élementaires, des Lampes perpétuelles & des Phosphores. Et la description des tours de Gibeciere, derniere Edition en 4 vol. *in-octavo*, avec plus de 100 planches, 20 l.

Recueil des Pieces qui ont remporté le

prix de l'Academie Royale des Sciences, depuis leur fondation en 1720. jusqu'en 1732. en 2. vol. *in-quarto*, avec quantité de planches, 18 l.

Oeuvres du P. Pardies, contenant les Elemens de Géometries, la Statique, le mouvement Local, & la connoissance des bêtes, *in-douze*, 3 l.

L'Arithmetique des Géometres, contenant l'Arithmétique, l'Algebre, l'Analyse, les Progressions, &c. & généralement tout ce que l'on renferme sous le nom d'*Elemens de Mathématiques*, par M. l'Abbé Deidier, *in-quarto sous presse*.

Maniere de tenir les Livres de Comptes à partie double, par débit & crédit, par recette, dépense & reprise, par le Sr Irson, *in-folio*, 10 l.

Idem. L'Arithmetique pratique & raisonnée, *in-quarto*, 7 l.

Idem. La Pratique générale des Changes Etrangers, pour tous les Pays du monde, *in-quarto*, 6 l.

L'Arithmetique, où toutes les operations de cette Science sont démontrées par une méthode fort simple; le tout appliqué à la Guerre, aux Finances & à la Marchandise, par M. Ozanam, *in-octavo*, 2 l.



HUIT LIVRES DES ELEMENS D'EUCLIDE.

Avec l'Usage des Propositions.

LIVRE PREMIER.

LE dessein d'Euclide dans ce Livre est, de donner les premiers principes de la Géometrie ; & pour le faire avec méthode, il commence par les Définitions, & par l'explication des Termes les plus ordinaires. Il fait ensuite quelques suppositions ? Et ayant proposé quelques maximes que la raison naturelle nous enseigne ; il prétend ne rien avancer sans démonstration, mais convaincre une personne qui ne voudroit rien accorder, que ce qu'on l'obligeroit d'avoüer. Dans les premieres Propositions il traite des Li-

gnes & des divers Angles qui se forment à leur rencontre : & ayant besoin pour en démontrer les propriétez, de comparer quelques Triangles, il le fait dans les huit premieres Propositions. Il donne ensuite quelques pratiques pour diviser un angle, & une ligne en deux également, & pour tirer une perpendiculaire. Il poursuit les proprietez du Triangle, & ayant montré celles des lignes paralleles, il acheve d'expliquer les Triangles, pour passer aux Parallelogrammes, donnant la maniere de réduire toute sorte de Polygone à une figure plus reguliere, sçavoir à un Parallelogramme. Il finit ce premier Livre par la celébre Proposition de Pythagore, par laquelle il démontre que dans un Triangle rectangle, le quarré de la base est égal aux quarrez des deux autres côtez mis ensemble.

LES DEFINITIONS.

1. LE Point est ce qui ne contient aucune partie.

Cette definition se doit prendre dans ce sens. La quantité que nous concevons sans distinguer ses parties, ou sans penser qu'elle en ait, est un point Mathematique, bien different de ceux de Zenon, qui étoient tout à fait indivisibles, puisqu'on peut douter

avec raison, si ces derniers sont possibles quoiqu'on ne doute pas des premiers, si on les conçoit comme il faut.

2. La ligne est une longueur sans largeur.

Le sens de cette définition est la même que celui de la precedente. La quantité que nous considerons comme une longueur, sans faire réflexion a sa largeur, ni à son epaisseur, est ce que nous entendons par ce mot de ligne: quoiqu'on ne puisse pas tracer une ligne réelle, qui n'ait quelque largeur déterminée. On dit ordinairement que la ligne est produite par le mouvement d'un point: ce qu'on doit bien remarquer; puisque de cette sorte le mouvement peut produire toute sorte de quantité. Imaginez-vous donc qu'un point se meut, & qu'il laisse une trace dans le milieu qu'il parcourt, cette trace est une ligne.

3. Les deux extrêmitez d'une ligne sont des points.

4. La ligne droite est celle dont les points sont placez également dans l'entre-deux.

Ou si vous aimez mieux; la ligne droite est la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer d'un point à l'autre.

5. La surface ou superficie est une quantité qui a quelque longueur, & quelque largeur, sans aucune épaisseur.

6. La surface plane ou droite, est celle dont les lignes sont posées également dans l'entre-deux ; ou celle à laquelle une ligne droite se peut ajuster en tous sens.

Planche I. Fig. I. *J'ai déja remarqué que le mouvement pouvoit produire toute sorte de quantité : ainsi nous disons que quand une ligne en parcourt une autre, elle produit une surface, ou un plan : & que ce mouvement a du rapport à la multiplication Arithmetique. Imaginez-vous donc que la ligne AB parcourt la ligne BC, & qu'elle garde toûjours la même situation, sans pancher d'un côté ni d'autre : le point A decrira la ligne AD, le point B, la ligne BC, & les autres points d'entre-deux, d'autres lignes paralleles, qui composeront la surface ABCD. J'ajoûte que ce mouvement répond à la multiplication Arithmetique : car si je sçavois le nombre des points, qui sont dans les lignes AB, BC, les multipliant l'un par l'autre, j'aurois le nombre des points, qui compose la surface ABCD. Comme si AB contenoit quatre points, & BC six : disant quatre fois six, font vingt-quatre ; la surface ABCD seroit composée de vingt-quatre points. Or à la place d'un point Mathematique je puis prendre quelque quantité que ce soit ; par exemple, un pied, pourvû que je ne les soudivise pas en parties.*

8. L'angle plan, eſt l'ouverture de deûx lignes, qui ſe touchent ſur une ſuperficie plane, & qui ne compoſent pas une ſeule ligne.

Comme l'ouverture D, des lignes AB, CB, qui ne ſont pas parties d'une même ligne. Pl. 1. Fig. 2.

L'angle rectiligne eſt l'ouverture de deux lignes droites.

C'eſt principalement de cette ſorte d'angle, que je dois traiter maintenant; parce que l'experience me fait voir, que la plûpart de ceux qui commencent, ſe trompent, meſurant la grandeur d'un angle, par le plus, ou moins de longueur des lignes qui le forment & le comprennent.

L'angle le plus ouvert, eſt le plus grand; c'eſt-à-dire, quand les lignes d'un angle s'écartent davantage que celles d'un autre angle, les prenant à la meme diſtance de leur pointe, le premier eſt plus grand que le ſecond. Ainſi l'angle A eſt plus grand que l'angle E; parce que prenant les points D & B autant éloignez de la pointe A, que les points G & L, le ſont de la pointe E; les points B & D, ſont plus écartez l'un de l'autre, que les points G & L: d'où je conclus que ſi on continuoit EG, EL, l'angle E ſeroit toûjours de même grandeur, & plus petit que l'angle A. Pl. 1. Fig. 3. & 4.

Fig. 3. *Nous nous ſervons de trois lettres, quand nous voulons nommer un angle, & la lettre du milieu en marque la pointe, comme l'angle BAD, eſt l'angle que les lignes BA, AD forment par leur concours au point A : l'angle BAC, eſt celui des lignes BA, AC : l'angle CAD, eſt compris par les lignes CA, AD, & le point A eſt nommé angulaire.*

C'eſt par le Cercle qu'on meſure les angles. Ainſi voulant ſçavoir la grandeur de l'angle BAD; je mets le pied du compas au point A, & je décris l'arc ou partie de Cercle BCD : l'angle ſera d'autant plus grand, que l'arc BCD, qui le meſure, contiendra plus de parties de ſon Cercle : & parce que communément on diviſe un Cercle en trois cens ſoixante parties, qu'on nomme degrez, on dit qu'un angle eſt de vingt, trente, quarante degrez, quand l'arc renfermé dans ces lignes contient vingt, trente, quarante degrez. Ainſi l'angle eſt plus grand, qui contient plus de degrez : comme l'angle BAD, eſt plus grand que GEL. Fig. 3. & 4. *La ligne CA diviſe l'angle BAD par le milieu, parce que les arcs BC, CD ſont égaux : & l'angle BAC, eſt partie de l'angle BAD, parce que l'arc BC eſt partie de l'arc BD.*

10. Quand une ligne tombant ſur une autre, fait de part & d'autre des angles

égaux ; ils sont droits ou Ortogones, & la ligne est perpendiculaire, ou Ortogonale.

Comme si la ligne AB tombant sur CD, fait avec la ligne CD des angles égaux ABC, ABD ; c'est-à-dire, si ayant décrit du centre B, un demi Cercle CAD ; les arcs AC, AD sont égaux : les angles ABC, ABD sont appellez droits, & la ligne AB perpendiculaire. Ainsi parce que l'arc CAD est un demi Cercle, les arcs CA, AD sont chacun d'un quart de Cercle, c'est-à-dire la quatriéme partie de trois cent soixante degrez : qui est par consequent de nonante degrez. Pl. 1. Fig. 5.

11. L'angle obtus est plus grand qu'un angle droit.

Comme l'angle EBD, est obtus ou émoussé ; parce que son arc EAD, contient plus d'un quart de Cercle.

12. L'angle aigu est plus petit qu'un angle droit.

Comme l'angle EBC est aigu ; parce que l'arc EC qui le mesure, a moins de nonante degrez.

13. Le Terme est l'extrêmité, ou le bout d'une quantité.

14. La figure est une quantité terminée par un ou plusieurs termes.

Elle doit être bornée & fermée de tous côtez pour être appellée figure.

15. Le Cercle est une figure plane ; bornée par le contour d'une ligne, qu'on nomme circonference ou periferie, qui est par tout également éloignée du point du milieu de la figure, appellé Centre.

Pl. 1. Fig. 6. *La figure RVSX est un Cercle, parce que toutes les lignes TR, TS, TV, TX, tirées du point T, jusqu'à la circonference RVSX sont égales.*

16. Ce point T du milieu du Cercle s'appelle centre.

17. Le diametre du Cercle, est quelque ligne droite que ce soit, qui passant par le centre, aboutit à sa circonference.

Il est évident que le diametre divise le Cercle & sa circonference en deux également, comme VX, ou RS.

Le demi-diametre, ou rayon du Cercle, est une ligne qui partant du centre aboutit à la circonference du Cercle : Ainsi les lignes TS, TR, TV, TX, sont autant de demi-diametres.

18. Le demi-Cercle est une figure terminée par le diametre, & la demi-circonference, comme VSX.

19. Les figures rectilignes sont terminées par des lignes droites. Il y en a de trois, de quatre, de cinq, & d'autant de côtez qu'on voudra, & pour lors ces figures sont appellées Polygones.

Le Triangle eſt la premiere de toutes les figures rectilignes.

Euclide diviſe les Triangles rectilignes, ou par les angles, ou par les côtez.

20. Le Triangle équilateral, eſt celui qui a les trois côtez égaux, comme le Triangle ABC. Pl. 1. Fig. 7. 8. & 9.

21. Le Triangle Iſoſcele, eſt celui qui a ſeulement deux côtez égaux, comme ſi les côtez DE, EF ſont égaux, le Triangle DEF eſt Iſoſcele.

22. Le Triangle Scalene a tous les côtez inégaux comme le Triangle HIG.

23. Le Triangle rectangle, ou Ortogone, eſt celui qui a un angle droit, comme DEF, ſuppoſé que l'angle E ſoit droit.

24. Le Triangle Obtuſangle ou Amblygone a un angle obtus, comme IGH.

25. Le Triangle acutangle ou Oxygone a tous les angles aigus, comme ABC.

26. La figure Quadrilaterale ou qui a quatre côtez, eſt appellée rectangle, ſi les quatre angles ſont droits. Pl. 1. Fig. 10.

27. Le quarré eſt le parfait rectangle, parce qu'il a tous les côtez égaux, & tous les angles droits, comme le quarré AB, qui eſt équilateral & rectangle.

28. La figure Quadrilaterale, qui eſt barlongue, & qui eſt équiangle, ayant tous les quatre angles droits comme CD, Pl. 1. Fig. 11.

mais qui n'eſt pas équilaterale ; n'ayant que les côtez oppoſés égaux, eſt ordinairement appellée quarré-long, ou ſimplement rectangle.

Pl. 1. Fig. 12. 29. La figure Quadrilaterale, qui eſt équilaterale, mais non pas équiangle, ni rectangle, n'ayant que les angles oppoſés égaux comme BF, eſt appellée Rhombe.

Pl. 1. Fig. 13. 30. La figure Quadrilaterale, qui a les côtez oppoſés égaux entr'eux, comme GH, ſans être équilaterale ni rectangle ; eſt appellée Rhomboïde.

31. Les autres figures Quadrilaterales irregulieres, s'appellent Trapeſes.

Pl. 1. Fig. 14. 32. Les lignes droites paralleles, ſont celles qui ne concourent jamais, étant partout également éloignées l'une de l'autre, comme les lignes AB, CD.

Pl. 1. Fig. 15. 33. Le parallelogramme eſt une figure de quatre côtez, dont les deux côtez oppoſés ſont paralleles, comme la figure A BDC, dont les côtez AB, CD, & AC, BD ſont paralleles.

Pl. 1. Fig. 15. 34. Le diametre ou diagonale d'un parallelogramme, eſt une ligne droite, tirée d'angle en angle, comme BC.

35. Les complemens ſont les deux petits parallelogrames, par leſquels le diametre ne paſſe pas, comme AFEH, & GDIE.

Les Demandes, ou Suppositions.

1. On ſuppoſe qu'on peut tirer une ligne droite, de quelque point que ce ſoit, à un autre.

2. Qu'on peut continuer une ligne droite, autant que l'on voudra.

3. Qu'on peut d'un centre donné, décrire un Cercle à quelque ouverture de compas que ce ſoit.

Les Maximes, ou Axiomes.

1. Les quantités qui ſont égales à une troiſiéme, ſont égales entre-elles.

2. Si on ajoûte des quantités égales à d'autres quantités auſſi égales, celles qui en ſeront produites ſeront égales.

3. Si on retranche de deux quantités égales, deux autres quantités auſſi égales, celles qui reſteront ſeront égales.

4. Si on ajoûte des parties égales à des quantités inégales, les composées demeureront inégales.

5. Si des quantités égales on en retranche des parties inégales, celles qui reſteront ſeront inégales.

6. Les quantités qui ſont doubles, triples, quadruples d'une même quantité, ſont égales entre-elles.

7. Les quantités ſont égales, lorſqu'étant ajuſtées l'une ſur l'autre, elles ne ſe ſurpaſſent point.

8. Les lignes & les angles égaux, étant mis l'un sur l'autre, ne se surpassent pas.

9. Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

Pl. 1. Fig. 16. L'onziéme Maxime d'Euclide porte que, si les lignes AB, CD, forment avec la ligne EF, qui les coupe toutes deux, des angles internes BEF, DFE, plus petits que deux droits, ces lignes AB, CD étant prolongées, se rencontreront vers B & D.

Quoique cette Maxime soit véritable, elle n'est pas assez claire pour être reçûë pour Maxime : ainsi j'en substituë une autre en sa place.

11. Si deux lignes sont paralleles, toutes les perpendiculaires renfermées entre-elles seront égales.

Pl. 1. Fig. 17. *Comme, si les lignes AB, CD sont paralleles, les lignes perpendiculaires FE, HG, sont égales. Car si EF étoit plus grande que GH; les lignes AB, & CD seroient plus éloignées entre elles vers les points E & F, que vers G, & H : ce qui seroit contre la définition des paralleles, laquelle porte, qu'elles ont par tout la même distance, mesurée par des perpendiculaires.*

12. Deux lignes droites, ne compren-

nent pas une espace : c'est-à-dire, ne l'enferment, & ne l'entourent pas de tous côtez.

13. Deux lignes droites, n'ont pas un segment commun : *Je veux dire que des deux lignes droites AB, CB qui se rencontrent au point B, il ne se fait pas une seule ligne BD ; mais qu'elles se coupent, & se séparent après s'être rencontrées en B. Car si on décrit un Cercle du point B comme centre, AFD seroit un demi Cercle, puisque la ligne droite ABD, passant par le centre B, divise le cercle en deux également. Le segment CFD seroit aussi un demi Cercle, puisque CBD seroit aussi une ligne droite qui passeroit par le centre B : Donc le segment CFD seroit égal au segment AFD, la partie à son tout ; ce qui seroit contraire à la neuviéme Maxime.* Pl. 1. Fig. 18.

AVERTISSEMENT.

Nous avons deux sortes de Propositions : quelques-unes ne font que considerer une verité, sans descendre à la pratique ; & nous les appellons Théoremes. Les autres nous proposent quelque chose à faire ; & on les appelle Problémes.

Le premier nombre des citations, est celui de la proposition : Le second marque le Livre. Comme par la 2. du 3. signifie, par la seconde Proposition du troisiéme Livre. Que

ſi on ne rencontre qu'un nombre, il ſignifie la Propoſition du Livre que l'on explique.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

Tracer un Triangle équilateral ſur une ligne donnée.

QU'on propoſe la ligne AB pour baſe d'un Triangle équilateral. Décrivez du centre A, & de l'intervalle AB, le Cercle CBD : Décrivez auſſi du centre B, & de l'intervale BA, le Cercle DAC, qui coupe le premier au point C. Tirez enſuite les lignes AC, BC. Je dis que tous les côtez du Triangle ABC ſont égaux.

Demonſtration.

Pl. 1. Fig. 19. Les lignes AB, AC, tirées du même centre A, à la circonference du Cercle CBD, ſont égales par la définition du Cercle : les lignes BA, BC ſont auſſi égales, puiſqu'elles ſont tirées du centre B, à la circonference du Cercle CAD : enfin les lignes AC, BC étant égales à la même ligne AB, ſont auſſi égales entre-elles par le premier Axiome. Donc les trois côtez du Triangle ABC ſont égaux.

USAGE.

On peut se servir très-utilement du Triangle équilateral pour trouver une distance inaccessible, telle que la largeur d'une Riviere. Il faudroit pour cela décrire un Triangle équilateral sur une planche, & s'en servir en cette sorte : le Triangle BDE étant posé horisontalement, observez un point A au-delà de la Riviere, par le côté BD, & quelque autre point C, par le côté BE : transportez votre Triangle le long de la ligne BC, & faites en sorte de pouvoir le placer dans un endroit, où vous puissiez le long des côtez CG & CF, voir les points B & A. Je suppose qu'on y soit parvenu, & que le point C soit celui qu'on cherche ; cela étant on aura le Triangle équilateral ABC, dont le côté BC peut se connoître. On peut aussi connoître la distance DF, qui étant parallele à BC peut passer pour la base du Triangle équilateral DAE, lequel étant rapporte sur le papier par le moyen d'une Echelle, on peut trouver la perpendiculaire AN, qui est la distance qu'on cherche. Pl. 21 Fig. 20.



PROPOSITION II. & III.

Probleme.

1. Tirer d'un point donné une ligne égale à un autre. 2. Couper d'une grande ligne une partie égale à une plus petite.

Fig. 21. SI l'on veut du point donné B, décrire une ligne égale à la ligne A; prenez avec le Compas la longueur de cette ligne, & du point donné B comme centre décrivez un Cercle. Puis ayant tiré une ligne BD du centre à la circonference elle sera égale à la donnée A par la définition du Cercle.

Maintenant si l'on veut de la grande ligne BC, retrancher une partie égale à la ligne A, il ne faut que prendre la longueur de cette ligne avec le Compas, & de l'extrêmité B comme centre décrire un Cercle, qui ayant coupé la ligne BC, on aura la partie BI, qui est ce qu'on demande.

Usage.

On est souvent obligé de faire une ligne égale à une autre, & retrancher d'une grande ligne une partie égale à une plus petite,

petite, quand on construit des figures sur le Papier; on peut néanmoins remarquer, qu'il suffit quand on veut faire une ligne égale à une autre, de marquer deux points sans décrire de Cercle comme Euclide l'enseigne.

PROPOSITION IV.

THEOREME

Si deux Triangles ont deux côtez égaux chacun au sien, & les angles d'entre-deux égaux, ils auront aussi les bases & les autres angles égaux.

AUx deux Triangles proposés on suppose que le côté AB est égal au côté DE, & que pareillement les côtez AC & DF sont égaux, aussi bien que les angles A & D. On veut démontrer que les bases BC & EF sont égales, aussi bien que les angles qui sont à leurs extrêmitez. Fig. 22 & 23.

Démonstration.

Si l'on suppose le Triangle ABC posé sur le Triangle DEF, en sorte que les côtez égaux conviennent parfaitement, les angles A & D ne se surpasseront pas, puisqu'ils ont été supposés égaux, non

plus que leurs côtez AC, DF & AB, DE. Cela étant leurs extrêmitez viendront aboutir les unes ſur les autres, & la baſe BC ſe trouvera préciſément égale à la baſe EF ; les angles B & E ſeront égaux, puiſque les côtez AB, BC de l'un conviennent parfaitement ſur les côtez DE & EF de l'autre. L'angle C ſera auſſi démontré égal à l'angle F, par la même raiſon. Donc ces deux Triangles ſont égaux en tout ſens, puiſque nous avons fait voir qu'étant poſés l'un ſur l'autre, ils ne ſe ſurpaſſent point. C. Q. F. D.

USAGE.

Fig. 24. & 25. *Qu'on doive meſurer la ligne inacceſſible AB ; je regarde du point C, les points A & B ; puis je meſure l'angle C. Je meſure avec la toiſe les lignes AC, BC, que je ſuppoſe être acceſſibles. Je m'écarte enſuite dans la Campagne, je fais un angle DFE égal à l'angle C. Je fais auſſi FD & FE égaux à CA & CB. Or ſuivant cette Propoſition les lignes AB, DE ſont égales. C'eſt pourquoi meſurant avec la toiſe la ligne acceſſible DE, je connoîtrai la ligne inacceſſible AB.*

PROPOSITION V.

THEOREME.

Dans les Triangles Isosceles, les angles qui sont dessus la base sont égaux, comme aussi ceux qui sont au dessous.

QUe le Triangle ABC soit isoscele, c'est-à-dire, que les côtez AB, AC soient égaux; je dis que les angles ABC, ACB sont égaux, comme aussi les angles GBC, HCB, qui sont au dessous de la base BC. Qu'on s'imagine un autre Triangle DEF, qui ait l'angle D égal à l'angle A, & les côtez DE, DF égaux aux côtez AB, AC. Puisque les côtez AB, AC sont égaux, les quatre lignes AB, AC, DE, DF sont égales. Fig. 27.

Démonstration.

Puisque les côtez AB, DE, AC, DF sont égaux, comme aussi les angles A & D; si on mettoit le Triangle DEF, sur ABC, ils ne se surpasseroient pas l'un l'autre, mais la ligne DE tomberoit sur AB; DF sur AC; & EF sur BC (par la 4.) Donc l'angle DEF, seroit égal à ABC. Et puisqu'une partie de la ligne

DE, tombe ſur AB ; toute la ligne DI, ſera ſur AG, autrement deux lignes droites n'auroient qu'une partie commune; donc l'angle IEF ſera égal à GBC. Que ſi on renverſe le Triangle DEF, le préſentant d'un autre ſens au Triangle ABC, c'eſt-à-dire, de telle ſorte que DF tombe ſur AB, & DE ſur AC. Puiſque les quatre lignes AB, DF, AC, DE ſont égales; comme auſſi les angles A & D: les Triangles s'ajuſteront dans ce ſens, & les angles ACB, DEF, HCB, IEF, ſeront égaux. Or dans la premiere comparaiſon, l'angle ABC étoit égal à DEF, & GBC à IEF; donc les angles ABC, ACB qui ſont égaux au même DEF, & GBC, HCB, qui ſont auſſi égaux au même IEF, ſeront égaux entr'eux.



PROPOSITION VI.

THEOREME.

Si un Triangle a deux angles égaux entr'eux, les côtez qui le soutiennent seront aussi égaux.

JE suppose que le Triangle ABC a les deux angles B & C égaux, cela étant, je dis que les côtez AB, AC qui soutiennent ces deux angles, sont aussi égaux. Fig. 26.

Démonstration.

Pour faire voir que le côté AB est égal au côté AC, si les angles B & C sont égaux. Supposons pour un instant qu'ils sont inégaux; retranchez du côté AB, que je suppose être plus grand que AC, la partie BD égale à ce même côté AC; tirez la ligne CD: ensuite comparez le Triangle DBC avec le Triangle ABC, le côté DB du premier Triangle, est égal au côté AC, du second par supposition. Or le côté BC est commun aux deux Triangles; de plus l'angle B compris entre ces deux côtez DB & BC, est egal à l'angle ACB compris des deux côtez AC & CB; donc (par la 4) les Trian-

gles DBC & ABC feroient égaux ; mais cela ne peut être fans abfurdité, d'autant que ce feroit faire voir que la partie eft auffi grande que le tout ; il eft donc impoffible que le côté AB foit plus grand que le côté AC. On prouvera de même que le côté AC ne fçauroit être plus grand que le côté AB ; ainfi les deux côtez AB, AC font donc égaux entr'eux. C. Q. F. D.

J'ai démontré cette Propofition de même qu'elle eft démontrée dans les Oeuvres Pofthumes de M. Rohault, m'ayant paruë plus convaincante, que celles qui fe trouvent dans les anciennes Editions de ce Livre.

USAGE.

Fig. 21. *On peut fe fervir très-utilement de cette Propofition pour mefurer l'elevation d'une Tour, ou d'une Obelifque ; ainfi fi l'on vouloit fçavoir l'élevation de l'Obelifque AB, il faudroit attendre que le Soleil fût élevé de 45. degrez fur l'horizon ; pour avoir l'ombre CB, égale à la hauteur AB, car nous verrons par la fuite qu'au Triangle rectangle, tel que ABC, fi l'angle C eft de 45 degrez, l'angle A fera auffi de 45. par conféquent le Triangle fera Ifofcele ; c'eft-à-dire, que la hauteur AB fera égale à la longueur de l'ombre CB, laquelle*

étant connuë on aura ce qu'on cherche.

Nous omettons la Proposition septiéme, comme n'étant d'aucun usage.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

Si deux Triangles ont tous les côtez égaux, leurs angles compris par ces côtez égaux, seront aussi égaux entr'eux.

LEs Triangles ABC & DEF sont supposés avoir leurs côtez égaux les uns aux autres, c'est-à-dire, que AB, est égale à DE, AC à DF, & BC à EF. Cela étant je dis que l'angle A sera égal à l'angle D, B à E, C à F. Fig. 29.

Démonstration.

Cette Proposition peut se démontrer très-aisément, de même que la quatriéme. Car imaginez vous que le premier Triangle a été posé sur le second; cela étant leurs côtez ayant été supposés égaux, les extrêmités des côtez de l'un viendront aboutir sur les extrêmités des côtez de l'autre, les trois points A, B, C, convenant avec les trois points D, E, F, il est aisé de voir que les angles formés par les côtez égaux, sont égaux. C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

Diviser un angle en deux également.

Fig. 30. QU'on propose à diviser en deux également l'angle SRT. Coupez deux lignes égales RS, TR, mettant le pied du compas en R, & à quelque ouverture de compas que ce soit décrivant l'arc ST, tirez la ligne ST, & décrivez par la premiere Proposition, le Triangle équilateral SVT. Je dis que la ligne RV, divise l'angle SRT en deux également; c'est-à-dire, que les angles VRT, VRS sont égaux.

Démonstration.

Les Triangles VRS, VRT, ont le côté VR commun, le côte RT a été pris égal au côté RS: la base SV, est égale à VT, puisque le Triangle SVT est équilateral. Donc (par la 8.) les angles SRV, TRV, sont égaux.

USAGE.

Il est nécessaire de se servir de cette Proposition dans les Problêmes suivans, on s'en sert encore dans la plûpart des reductions qu'on fait.

fait des figures. Il seroit à souhaiter qu'on pût diviser un angle en trois, en cinq parties égales aussi aisement qu'en quatre, en 8, ou en 16 : mais ceci est d'une Geometrie differente : c'est-à-dire, que cela ne se peut faire que par le moyen des courbes, c'est-à-dire, des sections coniques. On trouvera cependant dans le beau Dictionnaire de Mathematique de M. Ozanam, au lieu où il traite de la Géométrie Speculaire, une courbe propre à diviser un angle en trois, en cinq également, qu'il dit être de l'invention de M. Tschirnhaus; cette courbe est très-commode, & on peut s'en servir aisément.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

Diviser une ligne en deux également.

ON propose de diviser la ligne AB, en deux parties égales, pour cela il ne faut que faire un Triangle équilateral ABC, & diviser (par le Prob. préced.) l'angle C en deux également, par la ligne EC; le point E où cette ligne coupe AB, est le point du milieu qu'on cherche, ce qui est bien évident; car le Trian- Fig. 31.

C

gle ACE est égal au Triangle ECB, puisqu'ils ont chacun un angle égal, qui est la moitié de celui qu'on vient de diviser, le côté EC leur est commun, & les côtez AC, CB sont égaux, donc (par la 4.) les bases AE & EB sont égales.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

D'un point pris sur une ligne élever une perpendiculaire.

Fig. 32. SOit la ligne donnée BC, & le point donné A, il faut de part & d'autre, de ce point donné, prendre les parties égales AB & AC; puis ayant ouvert un Compas d'une grandeur volontaire, du point C comme centre décrivez l'arc D, du point B avec la même ouverture de Compas, décrivez-en un second qui aille couper le premier, du point A au point de section D, tirez la ligne AD, elle sera perpendiculaire sur BC.

Démonstration.

Nous avons les deux Triangles égaux DAB & DAC, car leurs côtez sont égaux par la construction: Donc (par la 8.)

les angles DAB & DAC ſont égaux,& par conſéquent droits, ce qui prouve que la ligne AD eſt perpendiculaire ſur BC.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

Tirer une perpendiculaire à une ligne par un point hors de la même ligne.

IL ne faut que du point donné A comme centre; décrire l'arc BC qui coupe la ligne en deux points B & C, enſuite diviſer la partie BC en deux également au point E, la ligne tirée de A en E ſera perpendiculaire, ce qu'il eſt aiſé de démontrer; car les rayons AB, AC étant égaux auſſi bien que les côtez BE, EC; la ligne AE étant commune, on connoîtra comme dans le Problême précedent, que la ligne AE eſt perpendiculaire ſur BC, puiſqu'elle fait deux angles droits avec la ligne BC. Fig. 31



PROPOSITION XIII.

THEOREME.

Une ligne qui tombe sur une autre, fait avec elle deux angles droits, ou deux angles, lesquels pris ensemble sont égaux à deux droits.

Fig. 34. SI la ligne AD tombe perpendiculairement sur BC, les angles ADC & ADB seront droits (par la Définition 11.)
Fig. 35. mais si, par exemple, la ligne AD, au lieu d'être perpendiculaire étoit oblique comme ED, on auroit un angle aigu EDB, & un angle obtus EDC, lesquels pris ensemble vaudront deux droits; car si du point D comme centre vous décrivez un demi Cercle, l'arc FC sera la mesure de l'angle obtus, & l'arc BF sera la mesure de l'angle aigu; & comme ces deux arcs pris ensemble valent le demi Cercle, & que le demi Cercle est la mesure de deux angles droits; il s'ensuit qu'une ligne qui tombe sur une autre fait deux angles droits, ou deux angles qui leur sont égaux.

USAGE.

Quand nous connoiſſons un des deux angles, qu'une ligne fait en tombant ſur une autre, il eſt facile de connoître l'autre; car, par exemple, ſi je connois l'angle EAD de 50. degrez, je n'ai qu'à les ſouſtraire de 180, qui eſt la valeur de deux angles droits, il reſtera 130 pour la valeur de l'angle obtus EAC. Fig. 36.

J'obmettrai la propoſition 14. comme étant peu conſiderable. Je pourrai faire de même à l'égard de pluſieurs autres, pour ne m'attacher uniquement qu'à celles dont on ne peut ſe paſſer.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

Si deux lignes droites ſe coupent, les angles oppoſez au ſommet ſont égaux.

SOit les deux lignes AB & DC qui ſe coupent au point E. Je dis que l'angle AED, eſt égal à l'angle CEB. Fig. 37.

Démonſtration.

Si l'on conſidere que la ligne AE, en tombant ſur DC, fait avec elle les angles AED & AEC égaux à deux droits

(par la 13.) pareillement la ligne CE tombant sur AB, fait avec elle les angles BEC & AEC qui valent deux droits. Cela étant on peut remarquer que l'angle AEC est commun à cette valeur de deux droits; ainsi si on l'ôte des uns, & des autres, il restera l'angle CEB, égal à l'angle AED. C. Q. F. D.

USAGE.

Cette Proposition est très-considerable; elle sert principalement pour démontrer la 27. & pour l'appliquer à la pratique, soit, par exemple, l'angle AEC que l'on ne peut mesurer avec un instrument, parce que je Fig. 38. *suppose que c'est un Mur, ou tout autre corps solide qu'on ne peut parcourir, il faut prolonger les côtez AE & CE à volonté vers D & B, je veux dire qu'il faut se mettre sur l'alignement de ses côtez, pour avoir le Triangle BDE, qui se fait aussi petit, & aussi grand que l'on veut. Cela étant fait, il faut en mesurer les côtez pour les rapporter sur le Papier, pour faire un Triangle semblable, par lequel on pourra connoître l'angle E qu'on cherche.*



PROPOSITION XVI.

THEOREME.

L'angle exterieur d'un Triangle fait par la continuation d'un côté, est plus grand que chacun des interieurs opposez.

Continuez le côté BC du Triangle ABC, je dis que l'angle exterieur ACD, est plus grand que l'angle interieur opposé ABC, ou BAC. Imaginez-vous que le Triangle ABC se meut le long de la ligne BD, & qu'il est transporté en CED. Fig. 39.

Démonstration.

Il est impossible que le Triangle ABC se meuve de la sorte, sans que le point A change de place, allant vers E : Or s'il est meu vers E, l'angle ECD, c'est-à-dire ABC, est plus petit que l'angle ACD : donc l'angle interieur ABC, est plus petit que l'exterieur ACD.

Il est facile de prouver que l'angle A est aussi plus petit, que l'externe ACD : car ayant prolongé le côté AC jusqu'en F, les angles opposés BCF, ACD, sont égaux (par la 15.) & faisant glisser le

Triangle ABC le long de la ligne ACF, je démontrerai que l'angle BCF est plus grand que l'angle A.

USAGE.

Pl. 3. Fig. 40. *Nous tirons de cette Proposition plusieurs conclusions très-utiles. La premiere que d'un point donné, on ne peut tirer qu'une perpendiculaire à une ligne. Par exemple, que la ligne AB soit perpendiculaire à BC : je dis que AC ne sera pas perpendiculaire, parce que l'angle droit ABD qui est exterieur est plus grand que l'interieur ACB : donc ACB ne sera pas un angle droit, ni AC une perpendiculaire.*

La seconde, qu'on ne peut tirer du même point A, que deux lignes égales ; par exemple AC, AD sur une même ligne ou plan ED, & que si on tire une troisiéme AE, elle ne sera pas égale aux autres. Car puisque AC, AD sont égales, les angles ACD, ADC sont égaux (par la 5.) or dans le Triangle AEC, l'angle externe ACB est plus grand que l'interne AEC : & ainsi l'angle ADE, est plus grand que AED : donc les lignes AE, AD, & par conséquent AC, ne sont pas égales.

La troisiéme, est que si la ligne AC, fait l'angle ACB aigu, & ACE obtus, la perpendiculaire tirée du point A, tombera du côté de l'aigu ; car si on disoit que AE est

perpendiculaire ; & que l'angle AEF est droit, l'angle droit AEF seroit plus grand que l'angle obtus ACE, ce qui est impossible; donc &c. Ces conclusions nous servent pour mesurer les parallelogrames, les Triangles, & les Trapezes ; & pour les reduire aux figures rectangles.

On peut aussi facilement démontrer par cette Proposition la 27, comme on le peut voir dans les Elemens d'Euclide de M. Ozanam.

Nous omettrons la Proposition 17. comme n'étant qu'un Corollaire de la 32.

PROPOSITION. XVIII.

THEOREME.

Dans quelque Triangle que ce soit le plus grand côté est opposé au plus grand angle

Que le côté BC du Triangle ABC, soit plus grand que le côté AC, je dis que l'angle BAC opposé au côté BC, est plus grand que l'angle ABC, opposé au côté AC. Coupez dans BC, la ligne CD égale à AC, & tirez AD. Fig. 41.

Démonstration.

Puisque les côtez AC, CD sont égaux ;

le Triangle ACD sera Isocele ; (& par la 5.) les angles CDA, CAD seront égaux. Or l'angle total BAC, est plus grand que l'angle CAD ; donc l'angle BAC, est plus grand que l'angle CDA ; lequel étant extérieur, eu égard au Triangle ABD, est plus grand que l'interieur ABD (par la 16.) donc l'angle BAC est plus grand que l'angle ABD ; donc le plus grand côté est opposé au plus grand angle.

Fig. 42. & 43.

La proposition 19. est, pour ainsi dire, l'inverse de celle-ci, ne disant autre chose, que le plus grand angle est opposé au plus grand côté ; ainsi il me paroît qu'il est inutile de la rapporter ici, puisque la démonstration est la même que la précedente.

USAGE.

Fig. 43. *Cette Proposition peut servir sur le terrain, pour connoître de deux angles d'un Triangle celui qui est le plus grand, lorsqu'on n'a point d'instrument pour les mesurer : car si, par exemple, le côté BC est plus grand que AC, qu'on peut mesurer à ses pas, on connoît par cette Proposition que l'angle BAC, est plus grand que l'angle CBA.*

PROPOSITION XX.

THEOREME.

Dans quelque Triangle que ce ſoit, deux côtez pris enſemble ſont plus grands que le troiſiéme.

CEtte Propoſition ſe démontre aiſément par la définition de la ligne droite; car il eſt certain que dans le Triangle TLV, les deux côtez TL, & LV ſont plus grands pris enſemble que le côté TV, ce côté ici pouvant être conſideré comme une ligne droite, qui eſt la plus courte qu'on peut tirer du point T, au point V. Il n'en eſt pas de même des deux autres côtez pris enſemble, puiſqu'ils renferment une eſpace. C. Q. F. D. Fig. 40.



PROPOSITION XXI.

THEOREME.

Si dessus la même base, on decrit un petit Triangle dans un grand, les côtez du petit seront moindres que ceux du grand, & ils feront un angle plus grand.

Fig. 47. QU'on décrive le petit Triangle ADB; dans le Triangle ACB, dessus la même base AB. Je dis premierement que les côtez AC, BC, sont plus grands que les côtez AD, BD. Continuez le côté AD jusqu'en E.

Démonstration.

Dans le Triangle ACE, les côtez AC, CE sont plus grands que le seul côté AE, (par la 20.) donc en y ajoûtant le côté EB, les côtez AC, CB seront plus grands que les côtez AE, EB. Pareillement dans le Triangle DBE, les côtez BE, ED, sont plus grands que le seul côté BD; & ajoûtant le côté AD, les côtez AE, EB, seront plus grands que AD, BD. Mais AE, EB sont plus petits que AC, AB. Donc à plus forte raison AD, DB, seront plus petits que AC, CB.

Je dis de plus que l'angle ADB est plus grand que l'angle ACB.; car l'angle ADB est exterieur, eu égard au Triangle DEB. Il est donc plus grand que l'interieur DEB (par la 16.) pareillement l'angle DEB étant exterieur, eu égard au Triangle ACE, est plus grand que l'angle ACE: donc l'angle ADB est plus grand que l'angle ACB.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

Décrire un Triangle qui ait ses côtez égaux à trois lignes données, pourvû que deux prises ensemble soient plus grandes que la troisiéme.

QU'on propose à décrire un Triangle qui ait ses trois côtez égaux à trois lignes données AB, D, & E. Prenez avec le Compas la ligne D, & posant une de ses pointes au point B; faites un arc. Prenez ensuite la ligne E, & mettant le pied du Compas au point A, faites un autre arc qui coupe le premier au point C. Tirez les lignes AC, BC. Je dis que le Triangle ABC, est tel que vous le désirez. Fig. 41.

Démonstration.

Le côté AC est égal à la ligne E, puisqu'il aboutit à un arc décrit du centre A à l'ouverture de la ligne donnée E. Pareillement le côté BC, est égal à la ligne D, puisqu'il aboutit à un arc décrit du centre B, à l'ouverture de la ligne donnée D : & de plus la base AB est la troisiéme ligne donnée ; donc les trois côtez AC, BC, AB sont égaux aux lignes E, D, AB.

J'ai ajoûté une condition, que deux des lignes prises ensemble, soient plus grandes que la troisiéme ; parce que les arcs ne pourroient pas se couper, si les lignes D & E, étoient plus petites que la ligne AB, comme il est évident (par la 20.)

USAGE.

Cette Proposition nous sert considérablement pour faire une figure semblable à une autre. Les Ingenieurs ne peuvent s'en passer lorsqu'ils veulent toiser le vuide des endroits, où on a pris des Terres pour construire des Ouvrages ; car après avoir réduit ces figures en Triangles, on cherche la valeur des côtez pour les rapporter sur le Papier, & pouvoir par là connoître la superficie de toutes sortes de figures. On pourra voir notre Traité de la Géométrie des Ingenieurs, où

je traite du détail du toisé des Ouvrages de Fortification en general.

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

Faire un angle égal a un autre, à un point d'une ligne.

Q'on propose à faire un angle égal à EDF, au point A de la ligne AB. Décrivez des points A & D, comme centres, deux arcs BC, EF à même ouverture de Compas. Prenez la distance EF, & l'ayant transportée en BC, tirez la ligne AC. Je dis que les angles BAC, EDF sont égaux. Fig. 50. & 51.

Démonstration.

Les Triangles BAC, EDF ont les côtez AB, AC, égaux à DE, & DF, puisque les arcs BC, EF ont été décrits à la même ouverture de Compas; ils ont aussi les bases BC, EF égales: donc les angles BAC, EDF sont égaux (par la 8.).

USAGE.

Ce Problême est si necessaire dans la Géodesie, dans les Fortifications, dans la Per-

ſpective, dans la Gnomonique, & dans toutes les autres parties des Mathematiques, que la plûpart de leurs pratiques ſeroient impoſſibles, ſi on ne ſçavoit faire un angle egal a un autre, ou de tel nombre de degrez qu'on voudroit.

PROPOSITION XXIV. & XXV.

THEOREME.

De deux Triangles qui ont les deux côtez égaux, celui qui a le plus grand angle, a auſſi la plus grande baſe; & celui qui a la plus grande baſe, a auſſi le plus grand angle.

Fig. 52. & 53. QUe les côtez AB, DE; AC, DF, des Triangles ABC, DEF ſoient égaux; & que l'angle BAC ſoit plus grand que l'angle EDF. Je dis que la baſe BC, eſt plus grande que la baſe FE. Faites l'angle EDF égal à l'angle BAC (par la 32.) & la ligne DG égale à AC, puis tirez la ligne EG. Premierement les Triangles ABC, DEG, ayant les côtez AB, DE, AC, DG égaux; & l'angle EDG égal à BAC; ils auront auſſi les baſes BC, EG égales (par la 4.) & les lignes

lignes DG, DF étant égales à AC, seront égales entr'elles.

Démonstration.

Dans le Triangle DFG, les côtez DF & DG sont égaux ; & par conséquent les angles DFG, & DGF, le seront aussi : mais l'angle EGF est plus petit que DGF ; & l'angle EFG est plus grand que DFG ; donc dans le Triangle EFG, l'angle EFG étant plus grand que l'angle EGF, le côté EG opposé à ce plus grand angle, sera plus grand que le côté EF opposé au plus petit. Donc BC égal à EG, est plus grand que la base EF, C. Q. F. premierement D.

Que les côtez AB, DE, AC, DF, des Triangles ABC, DEF, soient égaux ; & que la base BC, soit plus grande que la base EF ; je dis que l'angle A sera plus grand que l'angle D. Fig. 54. & 55.

Si l'angle A n'étoit pas plus grand que l'angle D, il seroit ou égal ; & en ce cas les bases BC, EF seroient égales (par la 4.) ou il seroit plus petit ; & la base EF seroit plus grande que la base BC. L'une & l'autre est contre la supposition.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

Si un Triangle a un côté égal à celui d'un autre Triangle, & que les angles aux extrêmitez de ces côtez, soient égaux les uns aux autres, ces Triangles seront égaux en tout sens.

Fig. 56. & 57. SOient les deux Triangles ABC & DEF, dont le côté BC du premier est égal au côté EF du second ; aussi bien que les angles qui sont à leurs extrêmitez ; c'est-à-dire, l'angle B égal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F. Je dis que ces deux Triangles ont tous leurs côtez égaux chacun au sien, aussi bien que leurs angles.

Démonstration.

Appliquez par pensée ces deux Triangles l'un sur l'autre, en telle sorte que les deux côtez BC & EF conviennent parfaitement ; cela étant l'angle B n'excedera pas l'angle E, non plus que l'angle C l'angle F ; or les côtez AB & DE rencontreront semblablement, les deux autres côtez AC & FD à un point qui ne sera

qu'un avec A & D. L'angle A sera donc égal à l'angle D ; c'est pourquoi ces Triangles seront égaux (par la 8.) puisque chaque angle de l'un vient tomber sur chaque angle de l'autre.

USAGE.

Si l'on vouloit connoître la longueur d'une distance inaccessible, on le pourroit très-facilement par cette Proposition. Soit, par exemple, la distance AD qu'on cherche ; il faut pour la trouver, commencer à élever de l'extrêmité A une perpendiculaire AC, c'est-à-dire, que l'angle CAD soit droit ; ensuite prenant AC pour base, on observera le point D, pour que de l'extrêmité C, on puisse faire un angle ACD, avec la base & le rayon visuel CD, qui va rencontrer le point D : cela étant fait, il faut prolonger le côté AD, pour avoir AB, dont l'extrêmité B sera terminée par le rayon CB, qui doit faire avec la base AC, le même angle que le précedent ACD. Comme on peut parcourir la ligne AB, il est facile de la mesurer, & de connoître la distance AD. Fig. 52.

USAGE II.

On peut trouver une distance inaccessible d'une maniere plus commode que la précedente ; car celle-ci vous assujettit à avoir besoin d'une grande étendue.

Voici une pratique dont je me suis servi pour connoître la largeur du Pas de Calais, c'est-à-dire, la distance qu'il y a du rivage de Calais aux côtes d'Angleterre. J'ai pris sur le bord de la Mer une base d'une extrême grandeur; pour n'avoir pas la peine de la mesurer, j'en ai fait une plus petite qui m'a donné la grande par un calcul de Trigonometrie, & voici comme j'ai operé, soit, par exemple, la base AB de deux mille toises, aux extrêmitez de laquelle il y a des mires, c'est-à-dire, quelque chose qui puisse se voir de loin, ayant pris l'angle ABC formé par la base, le rayon BC, qui va rencontrer un objet au point C, je suppose cet angle de 86. degrez; si de l'extrêmité A vous faites un second angle, dont le rayon AC aille rencontrer le point C, cet angle, par exemple, sera de 69. degrez; présentement il ne s'agit que de faire une Echelle sur le Papier, & y rapporter la longueur AB, & les deux angles A & B, dont les côtez prolongés formeront un Triangle semblable au premier, & si du point angulaire, opposé à la base, vous faites tomber une perpendiculaire sur cette même base, cette ligne sera la distance que l'on cherche, laquelle peut se connoître par l'Echelle du Triangle.

Fig. 60. & 61.

LEMME.

Si deux lignes droites & paralleles viennent aboutir sur une autre ligne droite, les angles qu'elles formeront de même part seront égaux entr'eux.

LEs lignes AB & CD sont supposées paralleles, les extrêmitez B & D se terminent sur la ligne EF ; je dis que les angles ABD, CDF sont égaux. Ceci est naturel ; car si ces angles n'étoient pas égaux, ces lignes ne seroient pas paralleles, d'autant qu'elles seroient inégalement inclinées sur la base EF ; il s'ensuit donc qu'étant paralleles elles seront également inclinées ; & que par consequent les angles ABC, CDF, qu'elles forment de même part, sont égaux. Ceci est trop clair pour avoir besoin d'une démonstration plus étenduë. Pl. 3 Fig. 44

Les Propositions 27, 28, 29, & 30, ne contiennent pour ainsi dire que la même chose expliquée differemment ; c'est pourquoi j'ai crû faire plaisir aux Commençans en les reduisant toutes dans une seule, qui est la suivante.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

Tirer une ligne parallele à un autre, par un point donné.

Fig. 64 ON propose de tirer une ligne par le point C, laquelle soit parallele à la ligne AB; tirez la ligne CE, & faites l'angle ECD égal à l'angle CEA; je dis que la ligne CD est parallele à AB.

Démonstration.

Les angles alternes DCE, CEA sont égaux; donc les lignes CD, AB sont paralleles.

USAGE.

Pl. 4. Fig. 62. & 63. *Le Problême précedent, est très-propre pour tirer des lignes paralleles sur le Papier; mais on ne pourroit pas s'en servir pour tirer sur le Terrain une parallele à une autre inaccessible, par un point donné. Voici en peu de mots la maniere dont il faudroit agir pour cela. La ligne AB est supposée inaccessible, si on veut du point donné C, lui tirer une parallele. Commencez par vous donner la base CD, du point C, observez les extrémitez A & B, pour avoir l'angle* ACB

ACB que je suppose être de 40. degrez. Il faut de plus connoître l'angle ACD, qui sera, par exemple, de 108. degrez; à l'autre extrêmité D de la base prenez comme ci-devant les angles ADB & CDB; je suppose le premier de 60. degrez, & le second de 98. Comme la base CD est commune aux deux Triangles ACD & CDB, & qu'on peut en connoître la longueur, qui sera, par exemple, de 100. toises; tout ceci étant connu, il est aisé de parvenir à la connoissance de l'angle ABC, lequel étant une fois trouvé, si l'on fait l'angle BCE qui lui soit égal, la ligne CE sera parallele à AB, à cause de l'égalité des angles alternes ABC, BCE.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

L'angle exterieur d'un Triangle, est égal aux deux interieurs opposés pris ensemble, & les trois angles d'un Triangle rectiligne sont égaux à deux droits.

QUe le côté BC du Triangle ABC soit continué en D, je dis que l'angle exterieur ACD est égal aux deux an- Fig. 65.

gles interieurs A & B pris ensemble. Tirez par le point C, la ligne EC, parallele à AB.

Démonstration.

La ligne AB est parallele à CE, par consequent les angles ABC & ECD sont égaux : & de plus ces deux lignes étant paralleles, les angles alternes BAC & ACE sont égaux ; donc l'angle exterieur ACD est égal aux deux interieurs A & B.

Je démontre encore que les trois angles du Triangle valent deux droits ; car l'angle exterieur ACD, ne peut les valoir, que lorsqu'on lui aura ajoûté l'angle ACB, qui est le troisiéme angle du Triangle ACB. D'où je conclus que les trois angles d'un Triangle valent deux droits, puisque l'angle exterieur qui est égal aux deux interieurs A & B, les vaudra en lui ajoûtant le troisiéme ACB.

Voici encore une autre maniere de démontrer cette Proposition ; tirez la parallele EF à la base BC. Les deux côtez AB
Fig. 66. & AC font avec cette parallele trois angles qui valent deux droits, au point angulaire commun A. Pour démontrer que les trois angles BAE, BAC & CAF valent les trois angles du Triangle ABC ; remarquez que l'angle ABC est égal à son alterne EAB, & que pareillement l'autre

angle ACB, eſt auſſi égal à ſon alterne CAF, le troiſiéme angle BAC eſt commun; ce qui fait voir que les trois angles propoſés, dont la ſomme vaut deux droits, ſont égaux aux trois angles du Triangle C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

L'angle exterieur d'un Triangle, eſt plus grand que chacun des deux autres interieurs oppoſés; ce qui eſt bien évident, puiſqu'il les vaut tous deux.

2. Les deux angles d'un Triangle pris enſemble valent moins que deux droits. Ceci eſt inconteſtable, puiſque nous avons démontré qu'il les faloit tous trois pour les valoir.

3. Les trois angles d'un Triangle pris enſemble, ſont égaux aux trois angles d'un autre Triangle; ceci eſt bien vrai, puiſque dans l'un & dans l'autre les trois angles valent deux droits, & comme les angles droits ſont invariables, ceci doit être general.

4. Si les deux angles d'un Triangle ſont égaux aux deux angles d'un autre Triangle, leurs troiſiémes angles le ſeront auſſi.

5. Si dans un Triangle, il ſe trouve un angle droit, les deux autres ſeront aigus, & ces deux angles aigus vaudront enſemble un droit.

6. Chaque angle d'un Triangle équilateral, eſt de 60. degrez; & par conſequent les trois angles pris enſemble, vaudront 180. degrez. Ce qui eſt general dans tous les Triangles rectilignes; ſoit qu'ils ſoient iſoſceles, ou rectangles, ou ambligones, ou ſcalenes, ainſi des autres.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

Les deux lignes ſont égales & paralleles, qui ſont tirées du meme côté, par les extrémitez des deux autres lignes paralleles & égales.

Pl. 4. Fig. 67. QUe les lignes AB, CD ſoient paralleles & égales, & qu'on tire les lignes AC, BD, par leurs extrêmitez du même côté : Je dis que les lignes AC, BD ſont égales & paralleles. Tirez la diagonale BC.

Démonſtration.

Puiſque les lignes AB, CD ſont paralleles; les angles alternes ABC, BCD ſeront égaux. Ainſi les Triangles ABC, BCD, qui ont le côté BC commun, & les côtez AB, CD égaux, avec les an-

gles ABC, BCD, auront les bases AC, BD, égales (par la 4.) comme aussi les angles DBC, BCA : lesquels étant alternés, les lignes AC, BD sont paralleles.

USAGE.

On met en pratique cette Proposition pour mesurer tant les hauteurs perpendiculaires AG des montagnes, que les lignes horizontales CG, qui sont cachées dans leurs épaisseurs. Servez-vous d'une équerre fort longue, ADB, que vous mettrez au point A, de sorte que son côté DB soit à plomb. Mesurez les côtez AD, DB, faites-en de même au point B, & mesurez BE, EC : les côtez paralleles à l'horizon, c'est-à-dire, AD, BE ajoûtés ensemblé, donnent la ligne horizontale CG; & les côtez à plomb DB, EC, donnent la hauteur perpendiculaire AG. Cette façon de mesurer se nomme cultellation. Pl. 4. Fig. 68.

Cette Proposition peut encore servir pour mesurer sur la terre une ligne accessible par ses deux extrémitez, & inaccessible par le milieu. Car si l'on tire de ses deux extrémitez deux lignes quelconques égales & paralleles, & qu'on mesure la ligne qui joint les extrêmitez de ces deux mêmes lignes, on aura la grandeur de la ligne proposée sur la terre. Voyez la Géometrie Pratique des Ingenieurs.

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME.

Les côtez, & les angles opposés dans un parallelograme, sont égaux ; & la diagonale le partage en deux également.

Pl. 4. Fig. 67. QUe la figure ABDC soit un parallelograme, c'est-à-dire, que les côtez AB, CD, AC, BD, soient paralleles. Je dis que les côtez opposés AB, CD & AC, BD sont égaux aussi bien que les angles BAC & BDC ; ABD, ACD : & que la diagonale BC partage toute la figure en deux également.

Demonstration.

Les lignes AB, CD sont supposées paralleles : donc les angles alternes ABC, BCD, seront égaux. Pareillement les côtez AC, BD, étant supposez paralleles, les angles alternes ACB, CBD seront égaux. De plus, les Triangles ABC, BCD, qui ont le même côté BC, & les angles ABC, BCD, ACB, CBD égaux, seront égaux en tous sens (par la 26.) Donc les côtez AB, CD ; AC, BD, & les angles A & D sont égaux : & la diagonale

CB, partage la figure en deux également; & puisque les angles ABC, BCD, ACB, CBD sont égaux, mettant ensemble ABC, CBD; BCD, ACB, nous concluons que les angles opposés ABD, ACD seront égaux étant formés de ces angles égaux.

USAGE.

Les Arpenteurs ont quelquefois besoin de cette Proposition, pour faire des partages. Si un champ est parallelogramme, on le peut partager en deux également par la diagonale AD. Que si on est obligé de le partager par le point E, divisez la diagonale AD, en deux également en F, & tirez la ligne EFG, elle partagera la figure en deux également. Car les Triangles AEF, FGD qui ont les angles alternes EAF, FDG, AEF, FGD, & les côtez AF, FD égaux, sont égaux (par la 26.) Et puisque le trapeze BEFD, avec le Triangle AFE, c'est-à-dire, le Triangle ADB, est la moitié du parallelograme (par la 34.) le même trapeze EFDB, avec le Triangle DFG, sera la moitié de la figure. Donc la ligne EG la divise en deux egalement. Pl. 4. Fig. 69.

La Proposition inverse de ce Theorême est aussi veritable, sçavoir que si les côtez opposés AB, CD, sont égaux, aussi bien que les deux opposés AC, BD, la figure ADBC sera un parallelograme, à cause de Fig. 67.

l'égalité des deux Triangles *ABC*, BCD (*par la* 8.) *D'où l'on tire l'origine & la démonstration de cette regle double, que l'on appelle regle parallele.*

On peut ici démontrer facilement l'onziéme Maxime d'Euclide, qui porte que si
Pl. 4. Fig. 70. *une ligne droite, comme* EF, *coupe les deux AB, CD, en sorte que les deux angles interieurs* BEF: DFE, *qui sont d'un même côté, soient ensemble moindres que deux droits, les deux lignes AB, CD, étant prolongées concourront de ce même côté.*

Pour démontrer cette verité, il suffira d'avoir démontré que si du même côté des angles interieurs BEF, DFE, *on tire la droite* GH *terminée par les deux lignes AB,* CD, *& parallele à la ligne* EF, *cette ligne* GH *sera moindre que la ligne* EF. *Pour cette fin tirez par le point* H *la droite* HI *parallele à la ligne AB.* *Il est evident que cette ligne* HI *rencontre la ligne* EF *au point* I *entre les points* E, F, *parce que si elle la rencontroit au-delà du point* F, *comme en* L, *il s'ensuivroit que les deux angles* BEF, HLF, *seroient égaux à deux droits, & par consequent plus grands que les deux* BEF, *&* DFE, *qui sont supposés moindres que deux droits, & qu'ainsi en ôtant l'angle commun* BEF, *il resteroit l'angle* HLE *plus grand que l'angle* DFE,

ce qui est impossible, parce que l'angle HFE étant exterieur, est plus grand que l'interieur HLE. (par la 16.) Donc puisque le point I, tombe entre les deux E & F, & que la figure GHIE, est un parallelograme ; dont les côtez opposes GE, HI sont égaux, comme il a été démontré ; il s'ensuit que la ligne GH est plus petite que la ligne EF. Ce qu'il faloit démontrer.

PROPOSITION XXXV.

THEORÉME.

Les Parallelogrames sont égaux, quand ayant la meme base, ils sont entre les mêmes paralleles.

QUE les parallelogrames ABEC, ABDF, ayent la même base AB, & qu'ils soient entre les mêmes paralleles AB, CD : Je dis qu'ils sont égaux. Pl. 4. Fig. 71.

Démonstration.

Les côtez AB, CE, sont égaux (par la 34.) comme aussi AB, FD : donc CE, FD sont égales ; & y ajoûtant EF, les lignes CF, ED seront égales. Les Triangles CFA, EDB, ont les côtez CA, EB, CF, ED égaux & les angles DEB, FCA

l'un étant exterieur, & l'autre interieur du même côté, donc (par la 4.) les Triangles ACF, BED sont égaux : & leur ôtant à tous deux ce qu'ils ont de commun, c'est-à-dire, le petit Triangle EFG, le trapeze FGBD, sera égal au trapeze CAGE : & ajoûtant à tous deux le petit Triangle AGB, les parallelogrames ABEC, ABDF seront égaux.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

Les Parallelogrames sont égaux, qui étant entre les mêmes paralleles, ont des bases égales.

Pl. 4. Fig. 72. QUE les bases CB, OD, des parallelogrames ACBF, ODEG soient égales, & que l'un & l'autre soit entre les paralleles AE, CD. Je dis que les parallelogrames sont égaux. Tirez les lignes CG, BE.

Démonstration.

Les bases CB, OD, sont égales : OD, GE sont aussi égales : donc CB, GE, sont égales & paralleles ; & par consequent (suivant la 33.) CG, BE seront

égales & paralleles ; & CBEG sera un parallelograme égal à CBFA (par la 35.) puisqu'ils ont la même base. Pareillement prenant GE pour base, les parallelogrames GODE, CBEG sont égaux (par la même.) Ainsi les parallelogrames ACBF, ODEG sont égaux.

USAGE.

Nous réduisons les parallelogrames qui ont les angles obliques, comme CBEG ou ODEG, à des rectangles, comme CBFA ; de sorte que mesurant ce dernier, ce qui est facile ; c'est-à-dire, multipliant AC par CB, le produit sera égal au parallelograme ACBF, & par conséquent au parallelograme CBEG, ou ODEG.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME.

Les Triangles sont égaux, qui ayant la même base, sont entre les mêmes paralleles.

LES Triangles ACD, CDE seront égaux, s'ils ont la même base CD, & s'ils sont renfermés entre les paralleles AF, CH. Tirez les lignes DB, DF, pa- Pl. 4. Fig. 73.

ralleles aux lignes AC, CE, & vous aurez formé deux parallelogrames.

Démonstration.

Les parallelogrames CABD, CEFD, sont égaux (par la 35.) les Triangles ACD, CDE sont leurs moitiés (par la 34.) Donc les Triangles ACD, CDE sont égaux.

PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME.

Les Triangles sont égaux, qui ayant des bases égales, sont renfermés entre les mêmes paralleles.

Pl. 4. Fig. 73. LES Triangles ACD, GEH, sont égaux, s'ils ont les bases CD, GH égales, & s'ils sont renfermés entre les paralleles AF, CH. Tirez les lignes BD, HF, paralleles aux côtez AC, EG: & vous aurez formé deux parallelogrames.

Démonstration.

Les parallelogrames, ACDB, EGHF sont égaux, (par la 36.) les Triangles ACD, EGH, sont leurs moitiés (par la 34.) Ils sont donc aussi égaux.

USAGE.

Nous avons dans ces Propositions une pratique pour partager un champ triangulaire en deux parties égales, par exemple, dans le Triangle ABC. Divisez la ligne BC, que vous prendrez pour la base, en deux également en D : Je dis que les Triangles ABD, ADC sont égaux. Car si vous vous imaginez une ligne parallele à BC, qui passe par A, ces Triangles auront des bases égales, & seront entre les mêmes paralleles, & par consequent égaux. Nous pourrions faire d'autres partages, fondés sur la même Proposition que je laisse, de peur d'être trop long. Les Propositions 39. & 40. sont inutiles. Pl. 4. Fig. 74.

REMARQUE.

Comme il n'est point fait mention des Fig. 75. & 76. je dirai qu'elles servent à nous faire voir le moyen d'augmenter, ou de diminuer la hauteur d'un Triangle sans changer sa grandeur ; par exemple, s'il étoit question de changer le Triangle ABC à un autre AED qui lui soit égal, & compris entre la base AC & sa parallele FC, il faut prolonger AB jusqu'en E, & tirer la ligne EC à laquelle l'on menera du point B une parallele BD, qui coupe la base AC du Triangle ABC au point D, & tirant la ligne ED l'on formera un Triangle AED égal à ABC. Fig. 75.

Demonstration.

Les Triangles CBE, CED ayant la même base EC & étant renfermés entre les mêmes paralleles EC, BD sont (par la 37.) égaux. Et comme le Triangle EGC est commun à ces deux Triangles, l'on voit que les petits Triangles EBG, DGC sont égaux, & qu'étant joints à la Figure ABGD ils forment les Triangles ABC, AED. égaux.

Dans la Figure 76. il s'agit de réduire aussi un Triangle BAC à un autre BDE qui lui soit égal, & renfermé entre les paralleles BE & DG; l'on voit qu'il faut tirer la ligne DC & lui mener la parallele AE qui rencontre BC prolongé au point E, ensuite tirer la ligne DE qui donnera le Triangle BDE égal au Triangle ABC. La Démonstration est la même que celle de la Fig. 75.

PROPOSITION XLI.

THEOREME.

Un parallelograme sera double d'un Triangle, si étant entre les mêmes paralleles, ils ont leurs bases égales.

Pl. 5. Fig. 77. SI le parallelograme ABCD, & le Triangle EBC sont entre les mêmes paralleles AE, BC; & s'ils ont la même

base BC, ou s'ils ont des bases égales; le parallelograme sera le double du Triangle. Tirez la ligne AC.

Démonstration.

Les Triangles ABC, BCE, sont égaux (par la 30.) Or le parallelograme ABCD est double du Triangle ABC (par la 34.) il est donc double du Triangle BCE. Il seroit pareillement double d'un Triangle qui ayant sa base égale à BC, seroit entre les mêmes paralleles.

USAGE.

La Methode ordinaire de mesurer l'aire ou la surface d'un Triangle, est fondée sur cette Proposition: Qu'on propose le Triangle ABC: on tire de son angle A la ligne AD, perpendiculaire à la base BC; & multipliant la perpendiculaire AD par la demi base BE, le produit donne l'aire du Triangle; parce que multipliant AD ou EF par BE, nous avons un rectangle BEFH qui est égal au Triangle ABC. Car le Triangle ABC est la moitié du rectangle HBCG (par la 41.) aussi bien que le rectangle BEFH. Pl. 5. Fig. 78.

Nous mesurons toute sorte de rectilignes, comme ABCDE, le partageant en Triangles BCD, ABD, AED, tirant les lignes AD & BD, & les perpendiculaires CG, BF, EI. Car multipliant la moitié de BD, par CG, & la moitié de AD, par EI, & par Pl. 5. Fig. 79.

BF, *nous avons l'aire de tous ces Triangles : & les ajoûtant ensemble, la somme est égale au rectiligne ABCDE.*

Pl. 5. Fig. 10. & 11.

Nous trouvons l'aire des Poligones reguliers, en multipliant la moitié de leur contour, par la perpendiculaire tirée du centre à un de leurs côtez : car multipliant IG *par* AG, *on aura le rectangle* HKLM *égal au* Triangle AIB : *Et faisant le même pour tous les autres Triangles, prenant toûjours les demi-bases, on aura le rectangle* HKON, *qui a le côté* KO *composé des demi-bases, & par consequent égal au demi-contour ; & le côté* HK *égal à la perpendiculaire* IG.

C'est suivant ce principe, qu'Archimede a démontré, qu'un Cercle étoit égal à un rectangle compris sous le demi-diametre, & sous une ligne égale à sa demi-circonference. Mais cela se trouve démontré autrement dans le Theor. 6. *de la* Planimetrie *de Monsieur Ozanam.*



PRO-

PROPOSITION XLII.

PROBLEME.

Faire un Parallelograme égal à un Triangle, sous un angle donné.

ON desire un Parallelograme, qui soit égal au Triangle ABC, & qui ait un angle égal à l'angle E. Partagez la base BC en deux également au point D: tirez AG parallele à BC, (par la 31.) Faites aussi l'angle CDF égal à l'angle E, (par la 23.) Et enfin tirez la parallele CG. La figure FDCG est un parallelograme, puisque les lignes FG, DC, DF, CG, sont paralleles: Il est égal au Triangle ABC, & l'angle CDF, est égal à l'angle E. Pl. 5. Fig. 82. & 83.

Démonstration.

Le Triangle ADC est la moitié du parallelograme FDCG; (par la 41.) il est aussi la moitié du Triangle ABC, puisque les Triangles ADC, ADB sont égaux (par la 37.) Donc le Triangle ABC est égal au parallelograme FDCG.

USAGE.

Cette Proposition & les deux suivantes, sont comme trois Lemmes pour résoudre la Prop. 45.

PROPOSITION XLIII.

THEOREME.

Les complemens d'un parallelograme sont égaux.

Pl. 1. Fig. 15. DANS le parallelograme ABDC, les complemens AFEH, EGDI sont égaux.

Démonstration.

Les Triangles ABC, BCD sont égaux (par la 33.) Donc si on en soustrait les Triangles HBE, BIE; FEC, CGE qui sont aussi égaux (par la même,) les complemens AFEH, EGDI qui restent, seront égaux.

PROPOSITION XLIV.

PROBLEME.

Décrire un parallelograme sur une ligne, qui soit égal à un Triangle, & qui ait un angle déterminé.

Pl. 5. Fig. 14. ON propose de faire un parallelograme, qui ait un de ses angles égal à

l'angle E, un de ses côtez égal à la ligne D, & qui soit égal au Triangle ABC. Faites (par la 42.) le parallelograme BFGH, qui ait l'angle HBF égal à l'angle E, & qui soit égal au Triangle ABC. Continuez les côtez GH, GF, de sorte que HI soit égal à la ligne D: tirez la ligne IBN, & deux paralleles à GI & BH. Prolongez aussi le côté FB. Le parallelograme MK est celui que vous désirez.

Démonstration.

Les angles HBF, ou l'angle E, KBM sont égaux, (par la 15.) Pareillement les lignes KB, DM; KD, BM étant paralleles, les angles opposés B & D, seront égaux (par la 34.) & par consequent l'angle D est égal à l'angle E. Le côté KB est égal à la ligne HI ou D: enfin le parallelograme MK est égal (par la précedente,) au parallelograme GFBH; & celui-ci a été fait égal au Triangle ABC. Donc le parallelograme MK est égal au Triangle ABC, & il a un angle D, égal à l'angle E.

USAGE.

Cette Proposition contient une espece de division Géometrique: car dans la division Arithmetique, on propose un nombre, qui peut être imaginé comme un rectangle; par exemple, le rectangle AB, de 12. pieds Pl. 5. Fig. 25.

quarrez, qu'il faut diviser par un autre nombre comme par 2. c'est-à-dire, qu'il faut faire un autre rectangle, égal au rectangle AB, qui ait BD de 2. pour un de ses côtez; & chercher de combien de pieds sera l'autre côté, c'est-à-dire, le quotient. On en vient à bout géometriquement avec la regle & le compas. Prenez BD de 2. pieds, & tirez la diagonale DEF: la ligne AF, est celle que vous cherchez. Car ayant achevé le rectangle DCFG, les complemens EG, EC, sont égaux (par la 43.) & EG a pour un de ses côtez la ligne EH égale à BD de 2. pieds, & EI égale à AF. Cette façon de diviser s'appelle Application, parce qu'on applique le rectangle AB à la ligne BD, ou EH; & c'est la raison pour laquelle on appelle la division Application; car les anciens Géometres se servoient plutôt de la regle & du compas, que de l'Arithmetique.

PROPOSITION XLV.

PROBLEME.

Décrire un parallelograme, qui ait un angle déterminé, & qui soit égal à un rectiligne donné.

Pl. 5. Fig. 26. & 27. ON propose le rectiligne ABCD auquel il faut faire un parallelograme

égal, & qui ait un angle égal à l'angle E. Partagez le rectiligne en Triangle, tirant la ligne BD : & faites (par la 42.) un parallelograme FGHI, qui ait l'angle FGH égal à l'angle E, & qui soit égal au Triangle ABD. Faites aussi (par la 44.) un parallelograme IHKL, qui soit égal au Triangle BCD, & qui ait une ligne égale à IH, & l'angle IHK égal à l'angle E. Le parallelograme FGKL sera égal au rectiligne ABCD.

Démonstration.

Il reste à prouver, que les parallelogrames FGHI, HKLI n'en sont qu'un, c'est-à-dire, que GH, HK font une ligne droite. Les angles FGH, IHK sont égaux à l'angle E, & par consequent égaux : l'angle G, & GHI sont égaux à deux droits, puisque nous avons fait un parallelograme GHIF. Donc les angles GHI, KHI sont égaux à deux droits, & ainsi (par la 14.) GH, HK font une ligne droite.

USAGE.

Cette Proposition est comme la pratique des précedentes, & sert pour mesurer la capacité de quelque figure que ce soit, la réduisant en Triangles, puis faisant un parallelograme rectangle égal à ces Triangles, qui sera égal à la figure. On peut même faire un

parallelograme rectangle sur un côté déterminé, & qui soit égal à plusieurs figures irregulieres. Pareillement, ayant plusieurs figures, on peut décrire un rectangle égal à leur difference.

Mais ce Problême se peut résoudre par une methode bien plus courte, sçavoir en réduisant le rectiligne donné en Triangle, par le Théor. 13. de la Planimetrie de Monsieur Ozanam, & en faisant un parallelograme égal à ce Triangle, (par la 42.)

PROPOSITION XLVI.

PROBLEME.

Décrire un quarré sur une ligne donnée.

Pl. 4. Fig. 28. POur décrire un quarré sur la ligne AB, tirez deux perpendiculaires AC, BD égales à AB, & tirez la ligne CD.

Démonstration.

Les angles A & B étant droits, les lignes AC,BD sont paralleles (par la 28.) Elles sont aussi égales (par la constr.) Donc les lignes AB, CD sont paralleles & égales (par la 33.) & les angles A & C, B & D égaux à deux droits. Et puisque

A & B sont droits, les angles C & D le seront aussi. Donc la figure AD, a tous les côtez égaux, & tous les angles droits, & par consequent c'est un quarré.

USAGE.

Cette Proposition est comme un Lemme pour la Proposition suivante. Elle sert dans la Fortification pour la description des Redoutes quarrées, pour la construction des Citadelles à quatre Bastions, &c.

PROPOSITION XLVII.

THEOREME.

Le quarré de la base d'un Triangle rectangle, est égal aux quarrez des deux côtez, pris ensemble.

ON suppose que l'angle BAC est droit, & qu'on décrive des quarrez sur les côtez BC, AB, AC: celui de la base BC sera égal aux deux quarrez des côtez AB, AC. Tirez la ligne AH parallele à BD, & joignez les lignes AD, AE, FC, BG. Je prouve que le quarré AF est égal au rectangle BH, & le quarré AG au rectangle CH; & ainsi que le quarré BE est égal aux deux quarrez AF, AG. Pl. 5. Fig. 21.

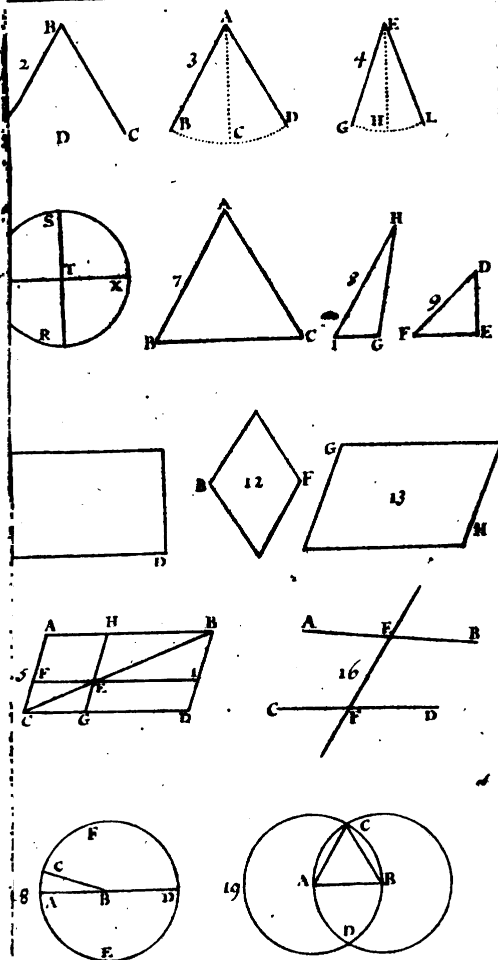
Démonstration.

Les Triangles FBC, ABD ont les
tez, AB, BF : BD, BC égaux : & les
gles FBC, ABD sont égaux, puisque c
cun, outre l'angle droit, contient l'an
ABC. Donc (par la 4.) les Triang
ABD, FBC sont égaux. Or le quarré A
est double du Triangle FBC, (par la 41
puisqu'ils ont la même base BF, & qu'
sont entre les paralleles BF, AC. Pareille
ment le rectangle BH est double du Trian
gle ABD, puisqu'ils ont la même base BD,
& qu'ils sont entre les paralleles BD, AH.
Donc le quarré AF, est égal au rectangle
BH. De même les Triangles ACE, GCB
sont égaux (par la 4.) le quarré AG est
double du Triangle BCG ; & le rectangle
CH est double du Triangle ACE (par la
41.) Donc le quarré AG, est égal au rectangle CH ; & par consequent les quarrez
AF, AG, sont égaux au quarré BDEC.

USAGE.

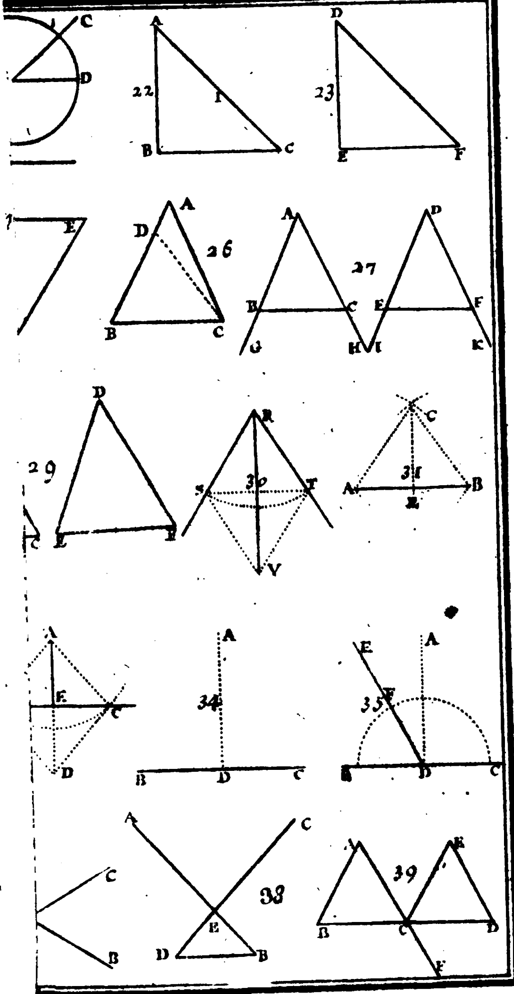
Fig. 90. *On dit que Pythagore ayant trouvé cette Proposition, sacrifia cent bœufs, pour remercier les Muses : ce ne fut pas sans raison, puisque cette Proposition sert de fondement à une grande partie des Mathematiques. Car premierement, la Trigonometrie ne peut pas s'en passer, puisqu'elle lui est nécessaire pour faire la table de toutes les lignes*

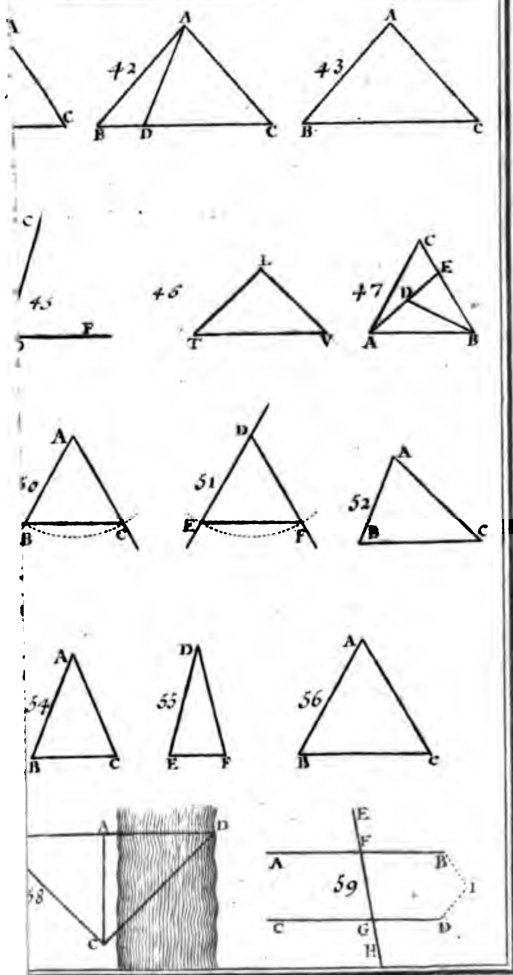
qu'on



B
2
D
C
A
3
B
C
D
E
4
G
H
L
S
T
X
R
A
7
B
C
H
8
I
G
D
9
F
E
D
B
12
F
G
13
H
A
H
B
5
F
E
I
C
G
D
A
E
B
16
C
F
D
F
C
8
A
B
D
E
19
C
A
B
D

ivre premier Planche deuxieme.




A
C
42
A
B
D
C
43
A
B
C
C
45
F
46
L
T
V
47
C
E
D
A
B
A
50
B
C
D
51
E
F
52
A
B
C
A
54
B
C
D
55
E
F
A
56
B
C
A
D
58
C
E
F
A
B
59
I
C
G
D
H

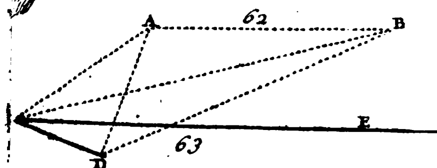
l'on peut inscrire dans un Cercle, c'est-à-ire, des Cordes, des Sinus, des Tangentes, des Secantes, ce que je fais voir dans exemple.

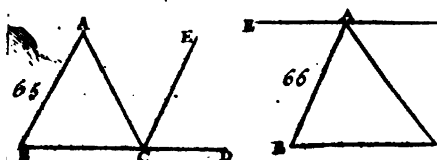
Qu'on suppose que le demi-diametre C, est divisé en 100000. parties, & que arc BC est de 30. degrez. Puisque le Sis d'un arc est la moitié de la corde ou Fig. 90. us-tendante du double d'un pareil arc; la rde de 60. degrez étant égale au demi-iametre AC; BD, qui est le Sinus de 30. egrez, sera égal à la moitié de AC: il ra donc de 50000. Dans le Triangle DB, le quarré de AB, est égal aux quarz de BD & AD. Faites donc le quarré B, multipliant 100000. par 100000. & u produit, ôtez le quarré de BD 50000. estera le quarré de AD, ou BF Sinus du omplement de 30. degrez; & tirant la raine quarrée, on aura la ligne FB. Puis aisant comme AD est à DB: ainsi AC est CE; on aura la Tangente CE de 30. derez: & ajoûtant les quarrez de AC, CE, n aura (par la 47.) le quarré de AE: uis tirant la racine quarrée, on connoîtra a longueur de la ligne AE Secante de 30. egrez.

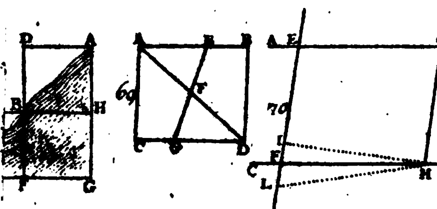
Par le moyen de cette Proposition nous Fig. 91. augmentons les figures autant que nous voulons: Par exemple, pour doubler le

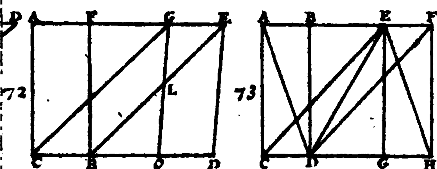
quarré ABCD, continuez le côté CD, sorte que CD, DE, soient égales : tir AE, le quarré de AE sera double du qua ré ABCD, puisqu'il est égal (par la 47. aux quarrez de AD, DE. Faisant l'an gle droit AEF, & prenant EF égal à AB le quarré de AF, sera triple de ABCD Faisant encore l'angle AFG droit, & FG égale à AB, le quarré de AG sera quadruple du quarré BD; ce que je dis du quarré se doit entendre de toutes les figures semblables.

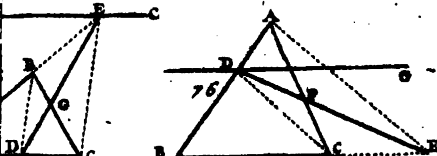



62
A
B
E
63
D

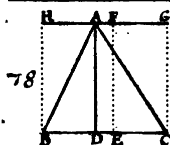

A
E
65
B
C
D
66
B

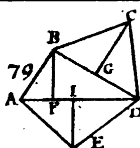

D
A
B
H
F
G
69
C
D
70
C
L
H

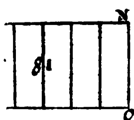

72
L
C
B
D
73
A
B
E
F
C
D
G
H

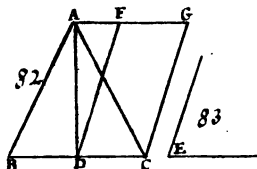

E
C
G
D
C
A
D
O
76
B
C

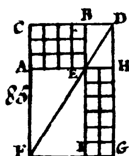
:vre premier Planche cinquiême.

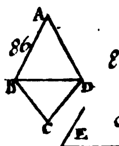


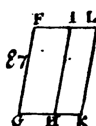


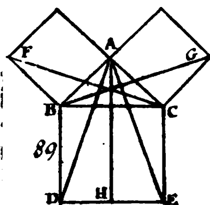


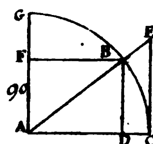


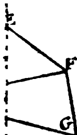














ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SECOND.

EUCLIDE traite dans ce Livre des puiſſances des lignes droites ; c'eſt-à-dire, de leurs quarrez ; comparant les divers rectangles qui ſe forment ſur une ligne diviſée, tant avec le quarré qu'avec le rectangle de toute la ligne. Cette Partie eſt très-utile, puiſqu'elle ſert de fondement aux principales Pratiques de l'Algebre. Les trois premieres Propoſitions démontrent la troiſiéme regle de l'Arithmetique : la quatriéme nous enſeigne à tirer la racine quarrée de quelque nombre que ce ſoit : les ſuivantes, juſqu'à la huitiéme, ſervent en pluſieurs rencontres dans l'Algebre : les autres nous donnent des Pratiques propres à la Trigonometrie.

Ce Livre paroît d'abord très-difficile,

parce qu'on s'imagine qu'il contient quelque mystere, néanmoins la plûpart de ses démonstrations sont fondées sur un principe fort évident ; qu'un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble ; ainsi on ne doit pas se rebuter, quoiqu'on ne comprenne pas du premier coup, les démonstrations de ce Livre.

Planche I. Fig. I.

Le parallelograme rectangle, ou simplement rectangle, est un quadrilatere compris sous deux lignes, dont l'une est la hauteur & l'autre la longueur, comme nous l'avons déja dit dans les Définitions du premier Livre : c'est de ces sortes de rectangles dont nous allons parler dans ce Livre ici ; ainsi la figure BD, sera un rectangle, puisque les quatre angles A,B,C,D sont droits. Supposons que la ligne BC, soit de 6 pieds, & l'autre DC de 4 multipliant 6 par 4 on aura 24 pieds pour la valeur du rectangle BD, ce qui fait voir que pour trouver la superficie d'un rectangle, il faut multiplier la base par la hauteur.

Fig. 2.

La figure FDH s'appelle gnomon, étant comprise par les deux rectangles FE & HG, & le quarré EG,

PROPOSITION I.

THEOREME.

Si on propose deux lignes, dont l'une soit divisée en plusieurs parties, le rectangle, compris sous ces deux lignes, est égal aux rectangles compris sous la ligne qui n'est pas divisée, & sous les parties de celle qui est divisée.

QU'ON propose les lignes AB, AC; & que AB soit divisé en tant de parties qu'on voudra; le rectangle AD, compris sous les lignes AB, AC, est égal au rectangle AG, compris sous AG, AE; au rectangle EH compris sous EG égale à AC, & sous EF; & au rectangle FD, compris sous FH égale à AC, & sous FB. Pl. 1. Fig. 3.

Démonstration.

Le rectangle AD, est égal à toutes ses parties prises ensemble, qui sont les rectangles AG, EH, & FD; sans qu'il y en ait aucun autre. Donc le rectangle AD, est égal aux rectangles AG, EH, FD, pris ensemble.

Par les nombres.

La même Proposition se verifie dans

les nombres. Supposons que la ligne AC, est de 5. pieds, AE de 2, FE de 4, FB de 3, & par consequent AB de 9. le rectangle compris sous AC 5; & AB 9, c'est-à-dire 5 fois 9 qui font 45, est égal à deux fois 5. ou 10. à 4. fois 5. ou 20, & à trois fois 5. ou 15; car 10. 20. & 15 font 45.

USAGE.

A.	53.
B.	8.
C. 50.	3.
B.	8.
D.	24.
E.	400.
F.	424

Cette Proposition démontre la pratique ordinaire de la multiplication. Par exemple, qu'on doive multiplier le nombre A 53, que la ligne AB represente, per le nombre B. 8. Je divise le nombre A, en autant de parties qu'il a de caracteres: par exemple, en deux, sçavoir 50 & 3 qui est C, lesquelles je multiplie par 8, disant: 8 fois 3 font 24 qui est D, & ainsi je fais un rectangle. Multipliant ensuite le nombre 50 par 8, le produit sera E, 400. Il est évident que le produit de 8 fois 53, qui est F, 424. est égal au produit 24. & au produit 400. mis ensemble.



PROPOSITION II.

THEOREME.

Le quarré d'une ligne, est égal aux rectangles compris sous toute la ligne, & sous ses parties.

On propose la ligne AB, & son quarré ABDC. Je dis que le quarré ABDC, est égal à un rectangle compris sous toute la ligne AB, & sous AE, & à un rectangle compris sous AB, & FE, & à un troisiéme compris sous AB, & FB. Pl. 1. Fig. 4.

Démonstration.

Le quarré ABCD est égal à toutes ses parties prises ensemble, qui sont les rectangles AG, EH, FD. Le premier AG est compris sous AC égale à AB, & sous AE. Le second EH, est compris sous FH égale à AC, ou AB, & sous FE. Le troisiéme FD, est compris sous FH égale à AB, & sous FB : & c'est la même chose, d'être compris sous une ligne égale à AB, & d'être compris sous AB. Donc le quarré de AB, est égal aux rectangles compris sous AB & sous AE, EF, FB.

Par les nombres.

Que la ligne AB, represente le nombre 9. son quarré sera 81. Que la partie AE, soit 4. EF, 3. FB. 2. 9. fois 4. font 36. 9. fois 3. font 27. 9. fois 2. font 18. Il est évident, que 36. 27. & 18. font 81.

USAGE.

Cette Proposition sert pour prouver la multiplication; comme aussi pour les équations de l'Algebre. Elle est comme un Corollaire de la précedente.

PROPOSITION III.

THEOREME.

Si on divise une ligne en deux, le rectangle compris sous toute la ligne, & sous une de ses parties, est égal au quarré de cette même partie, & au rectangle compris sous les deux parties.

Pl. 1. Fig. 5. QU'ON divise la ligne AB en deux au point C; & qu'on fasse un rectangle compris sous AB, & une de ses parties; par exemple AC, c'est-à-dire, que AD soit égale à AC; & qu'on acheve le rectangle AF. Il sera égal au quarré de AC, & au rectangle compris sous AC, BC. Tirez la perpendiculaire CE.

Démonstration.

Le rectangle AF compris sous AB, & sous AD égal à AC, est égal à toutes ses parties, qui sont les rectangles AE, CF. Le premier AE est le quarré de AC, puisque les lignes AC, AD sont egales: & le rectangle CF est compris sous CB, & sous CE, égal à AD, ou AC. Donc le rectangle compris sous AB, AC, est égal au quarré de AC, & à un rectangle compris sous AC, CB.

Par les nombres.

Que AB soit 8. AC, 3. CB, 5. le rectangle compris sous AB, & AC, sera 3. fois 8. ou 24. Le quarré de AC, 3. est 9. le rectangle compris sous AC, 3. & CB, 5. est 3. fois 5. ou 15. Il est évident que 15. & 9 font 24.

USAGE.

43.
40. 3.
3.
120. 9.
129.

Cette Proposition sert pour démontrer encore la pratique ordinaire de la Multiplication. Par exemple, si on veut multiplier le nombre 43. *par* 3. *ayant divisé le nombre* 43. *en* 40. *&* *en* 3. 3. *fois* 43. *qui font* 129. *seront autant que* 3. *fois*, 3. *ou* 9. *qui est le quarré de* 3. *&* *que* 3. *fois* 40. *qui font* 120. *Ceux qui commencent, ne doivent pas perdre courage,*

s'ils ne conçoivent pas d'abord ces Propositions: car elles ne sont difficiles que parce qu'on s'imagine, comme j'ai déja dit, qu'elles contiennent quelque grand mystere.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Si on divise une ligne en deux, le quarré de toute la ligne sera égal aux deux quarrez de ses parties & à deux rectangles compris sous ces mêmes parties.

Pl. 1. Fig. 6. QUE la ligne AB soit divisée en C: & qu'on fasse son quarré ABDE, qu'on tire la diagonale EB, & la perpendiculaire CF qui la coupe: & par ce point qu'on tire la ligne GL parallele à AB. Il est évident que le quarré ABDE est égal aux quatre rectangles GF, CL, CG, LF. Les deux premiers sont les quarrez de AC & de CB: les deux complemens sont compris sous AC, CB.

Démonstration.

Les côtez AE, AB sont égaux: donc les angles AEB, ABE sont demi droits; & à cause des paralleles GL, AB, les angles des Triangles du quarré GE, (par la 29. du 1.) seront égaux; comme aussi les

côtez (par la 6. du 1.) Donc GF est le quarré de AC. Pareillement le rectangle CL, est le quarré de CB : le rectangle GC, est compris sous AC, & sous AG égale à BL, ou BC : le rectangle LF est compris sous LD, égal à AC, & sous FD égal à BC.

Corollaire. Si on tire la diagonale d'un quarré, les rectangles qu'elle coupe sont quarrés.

SCOLIE.

On peut énoncer cette Proposition plus generalement, en disant que, si sur la ligne AB, divisée comme l'on voudra au point C, l'on décrit une figure de quatre côtez égaux comme ABDE, cette figure sera égale aux deux Rombes GF, CL, décrits sur les deux parties AC, BC, & aux deux parallelogrames CG, FL, décrits de ces deux mêmes parties. *Car la démonstration s'en fera de la même façon, pourvû que l'on suppose la ligne CF parallele au côté AE, & la ligne GL parallele à l'autre côté AB.*

USAGE.

A.	144.
B.	22.
C.	12.

Cette Proposition nous donne la pratique pour trouver la racine quarrée d'un nombre proposé. Que ce soit le nombre A 144. *representé par le quarré AD, & sa racine par la ligne AB. Je*

sçai d'ailleurs qu'elle doit avoir deux chiffres. Je m'imagine donc, que cette ligne AB est divisée en C, que AC represente le premier chiffre, & BC, le second. Je cherche la racine du premier chiffre du nombre 144. qui est 100. & je trouve que c'est 10. & faisant son quarré 100. representé par le quarré GF, je le soustrais de 144. & il reste 44. pour les rectangles GC, FL & le quarré CL. Mais parce que cette figure d'un Gnomon n'est pas propre, je transporte le rectangle FL, en KG, & j'ai un rectangle total KL, c'est-à-dire 44. Je connois aussi presque tout le côté KB : car AC est de 10. Donc KC sera de 20. Il faut donc diviser 44. par 20. c'est-à-dire, pour avoir ce diviseur, je double la racine trouvée, & je dis combien de fois 20. dans 44. Je le trouve deux fois, pour le côté BL : mais parce que 20. n'étoit pas le côté KB tout entier ; mais seulement KC ; ce 2. qui vient au quotient, s'ajoûte au diviseur, qui sera 22. Ainsi le trouvant deux fois précisément dans 44. la racine quarrée sera 12. Vous voyez que le quarré 144. est égal au quarré de 10. au quarré de 2. qui est 4. & à deux fois 20. qui sont deux rectangles compris sous 2. & sous 10.

PROPOSITION V,

THEOREME.

Si une ligne est coupée également, & inégalement, le rectangle compris sous les parties inégales, avec le quarré de la partie du milieu, est égal au quarré de la moitié de la ligne.

SI la ligne AB est divisée également en C, & inégalement en D; le rectangle AH, compris sous les segmens AD, DB, avec le quarré de CD, sera égal au quarré de CB moitié de AB. Achevez la figure, ainsi que vous le voyez: les rectangles LG, DI seront des quarrez (par le Corol. de la 4.) Je prouve que le rectangle AH, compris sous AD, & DH égal à DB, avec le quarré LG, est égal au quarré CF. Pl. 1. Fig. 7.

Démonstration.

Le rectangle AL, est égal au rectangle DF; l'un & l'autre étant compris sous la moitié de la ligne AB, & sous DB, ou DH qui lui est égal. Ajoûtez à tous deux le rectangle CH; le rectangle AH sera égal au Gnomon CBFGHL. Ajoûtez encore

à tous deux le quarré LG, le rectangle AH, avec le quarré LG sera égal au quarré CF.

Par les nombres.

Que AB soit 10. AC sera 5. & CB aussi. Que CD soit 2. & DB, 3. le rectangle compris sous AD, 7. & BD, 3. c'est-à-dire 21. avec le quarré de CD 2. qui sera 4. sera égal au quarré de CB, 5. qui sera 25.

USAGE.

Pl. 1. Fig. 8. *On peut se servir très-utilement de ce Theoréme, pour résoudre le Problême suivant, qui sans cela paroîtroit plus difficile. Trouver en nombres les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît le contour & l'aire. Que le contour du rectangle ABCD, soit de 28. pieds, & l'aire de 48. Prolongez le côté AB vers E, en faisant BE égale à BC; & alors toute la ligne AE sera 14. puisque la somme des quatre côtez, où le contour est 28. Divisez la ligne AE en deux également au point F, & alors chacune des deux moitiés AF, EF sera 7.*

Cette préparation étant faite, l'on considerera que puisque le rectangle des deux lignes AB, BE, ou AB, BC, c'est-à-dire 48. avec le quarré de BF, est égal au quarré 49. de AF, il s'ensuit, que si de 49. on ôte 48. il restera un. pour le quarré de BF, laquelle par conséquent vaudra 1. c'est

urquoi en ajoûtant BF à AF, ou 1. à 7. aura 8. pour le côté AB: & ôtant la ême BF de EF, ou 1. de 7. on aura 6. ur BE, ou pour l'autre côté BC; ce qu'il loit faire.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

i on ajoûte une ligne à une autre divisée en deux également, le rectangle compris sous la ligne composée des deux, & sous l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié de ligne divisée, est égal au quarré d'une ligne composée de la moitié de la divisée, & de toute l'ajoûtée.

SI on ajoute la ligne BD, à la ligne AB, divisée également en C; le rectangle AN, compris sous AD & sous DN, ou BD, avec le quarré de CB, est égal au quarré de CD. Faites le quarré de CD, & ayant tiré la diagonale FD, tirez BG parallele à FC, qui coupe FD, au point H, par lequel passe la ligne HN parallele à AD: KG sera le quarré de BC; & BN, celui de BD. Pl. 1. Fig. 9.

Démonstration.

Les rectangles AK, CH, sur les bases égales AC, CB, sont égaux (par la 36. du 1.) Les complemens CH, HE sont égaux (par la 43. du 1.) Donc les rectangles AK, HE sont égaux. Ajoûtez à tous deux le rectangle CN, & le quarré KG: les rectangles AK, & CN, c'est-à-dire le rectangle AN avec le quarré KG, sera égal aux rectangles CN, HE & au quarré KG, c'est-à-dire au quarré CE.

Par les nombres.

Que AB soit de 8. parties; AC, de 4. CB, de 4. BD, de 3. ainsi AD sera de 11. Il est évident que le rectangle AN, qui est trois fois 11. c'est-à-dire 33. avec le quarré de KG 16. qui font 49. est égal au quarré de CD, 7. qui est 49. car 7. fois 7. font 49.

USAGE.

Pl. 1. Fig. 10. *Maurolycus mesure toute la terre sur une seule observation, en se servant de cette Proposition. Il veut qu'on observe du sommet A, d'une montagne connuë selon sa hauteur l'angle BAC, que fait la ligne AB qui touche la surface de la terre en B, avec la ligne AC qui passe par le centre: & que dans le Triangle ADF, la ligne DF étant une touchante; sçachant l'angle A, & l'angle droit ADF, on trouve par la Trigonometrie*

metrie les côtez AF, FD; parce qu'il est facile de démontrer que FB, FD sont égales, on connoîtra la ligne AB & son quarré. Or nous démontrons par la Proposition précedente, que la ligne ED étant divisee en deux également au point C, & y ayant ajoûté DA, le rectangle compris sous EA, & sous AD, avec le quarré CD; ou CB, est égal au quarré de AC; & l'angle ABC étant droit, (comme on le prouve au troisiéme Livre) le quarré de AC, est égal aux quarrez de AB, BC. Donc le rectangle sous AE, AD, avec le quarré de BC, est égal aux quarrez AB, BC. Ostez de côté & d'autre le quarré de BC: le rectangle sous AE, AD sera égal au quarré de AB. Divisez donc le quarré de AB, que vous connoissez, par la hauteur de la montagne, qui est AD le quotient sera la ligne AE, de laquelle il faut soustraire la hauteur de la montagne: & vous aurez DE, le diametre de la terre.

Nous nous servons de la même Proposition dans l'Algebre; comme, pour démontrer la pratique dont on se sert, pour trouver la racine d'un quarré égal à un nombre, plus quelques racines. Les deux qui suivent, servent aussi pour prouver d'autres semblables pratiques.

On peut aussi par le moyen de cette Pro-

Pl. 1. Fig. 11. *position résoudre facilement le Problême suivant. Trouver en nombres les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît la difference des deux côtez & l'aire. Que la difference des deux côtez AB, BC, du rectangle ABCD soit de 4. pieds, & l'aire de 192. Prenez sur le plus grand côté AB la ligne BE, égale à l'autre côté BC, & alors la ligne AE sera la difference de ces deux côtez, & elle vaudra par consequent 4. & si on la divise en deux également au point F, chacune des deux moitiés AF, EF, vaudra 2.*

Cette préparation étant faite, l'on considerera que puisque le rectangle des deux lignes AB, BE, ou AB, BC, ou 192. avec le quarré 4. de la ligne EF, c'est-à-dire en tout 196. est égal au quarré de la ligne BF, en prenant la racine quarrée de 196. on aura 14. pour cette ligne BF, à laquelle ajoûtant AF, ou 2. on aura 16. pour le plus grand côté AB: & de laquelle ôtant EF, ou 2. il restera 12. pour la ligne BE, ou pour l'autre côté BC.

On trouvera dans le sixiéme Livre le moyen d'avoir deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, j'ai tiré ce Problême des Elemens de Geometrie de Clavius, lequel le démontre très-aisément par le moyen de cette Proposition.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

Si on divise une ligne, le quarré de toute la ligne, & celui d'une de ses parties seront égaux à deux rectangles compris sous toute la ligne, & sous cette premiere partie, & au quarré de l'autre partie.

QU'ON divise la ligne AB à discretion, au point C; le quarré AD, de la ligne AB, avec le quarré AL, sera égal à deux rectangles compris sous AB, AC, avec le quarré de CB. Faites le quarré de AB; puis ayant tiré la diagonale EB, & les lignes CF, HGI, prolongez EA, de sorte que AK soit égale à AC: ainsi AL, sera le quarré de AC, & HK sera égale à AB. Car HA est égale à GC, & GC est égale à CB, puisque CI est le quarré de CB, (par le Corol. de la 4.) Pl. 1. Fig. 12.

Démonstration.

Il est évident que les quarrez AD, AL, sont égaux aux rectangles HL, HD, & au quarré CI. Or le rectangle HL est compris sous HK, égale à AB, & sous LK, égale à AC. Pareillement le rectangle

HD est compris sous HI, égale à AB, & sous HE, égale à AC. donc les quarrez de AB, AC, sont égaux à deux rectangles compris sous AB, AC, & au quarré de CB.

Par les nombres.

Qu'on suppose la ligne AB de 9. parties; AC, de 4; CB, de 5: le quarré de AB, 9. est 81: celui de 4. est 16. Or 81 & 16. font 97. Un rectangle sous AB, AC, ou 4. fois 9. font 36: étant pris deux fois, ce sont 72: le quarré de CB, 5, est 25. Or 25. & 72. font aussi 97.

USAGE.

Pl. 1. Fig. 13. *Par le moyen de cette Proposition, l'on peut résoudre facilement le Problême suivant. Trouver en nombres les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît l'aire & la diagonale. Que l'aire du rectangle ABCD soit 240. pieds, & la diagonale AC de 26. Prenez sur le plus grand côté AB, la ligne BE égale à l'autre côté BC. & alors la ligne AE sera la difference de ces deux côtez que l'on pourra trouver en cette sorte.*

Puisque les quarrez des lignes AB, BE, ou AB, BC, c'est-à-dire, (par la 47.) le quarré 676. de la diagonale AB, qui a été supposée de 26. pieds, est egal au quarré de la ligne AE, & au double du rectangle sous AB, BE, ou sous AB, BC, c'est-à-dire à

480; si l'on ôte ce double 480. du quarré précedent 676, il restera 196. pour le quarré de la ligne AE, ou de la difference des côtez AB, BC, laquelle par conséquent sera de 14. pieds. Cette difference étant ainsi connue, avec l'aire du rectangle ABCD, les deux còtez AB, BC; se pourront connoître, comme il a été enseigné dans la Proposition précedente.

PROPOSITION. VIII.

THEOREME.

Si on divise une ligne, & qu'on lui ajoûte une de ses parties, le quarré de la ligne composée, sera égal à quatre rectangles, compris sous la premiere ligne, & sous cette partie ajoûtée, avec le quarré de l'autre partie.

QU'ON divise la ligne AB à discretion, au point C; & qu'on lui ajoûte BD, égale à CB: le quarré de AD sera égal à 4. rectangles compris sous AB, BC ou BD, & au quarré de AC. Qu'on fasse le quarré de AD; & ayant tiré la diagonale AE, qu'on tire les perpendiculaires BP, CN, qui coupent la diagonale en I, Pl. 13 Fig. 144

& en O : qu'on tire aussi les lignes MOH, GIR, paralleles à AB : les rectangles GC, LK, PH, MB, NR seront des quarrez (par le Corol. de la 4.)

Démonstration.

Le quarré ADEF, est égal à toutes ses parties; les rectangles LB, OD, PM sont compris sous des lignes égales à AB & BD. Si vous ajoûtez le rectangle MI au rectangle PH, vous aurez un rectangle compris sous une ligne égale à AB, & sous une autre égale à CB, ou BD. Il ne reste que le quarré GC, qui est celui de AC. Donc le quarré de AD est égal à quatre rectangles compris sous AB, BD, & au quarré de AC.

Par les nombres.

Que la ligne AB, soit de 7. parties : AC, de 3 ; BC, de 4, aussi-bien que BD, le quarré de AD. 11. sera de 121. Un rectangle sous AB, 7 ; & BD, 4, est de 28 : lequel étant pris quatre fois, sont 112, le quarré de 3. est 9. Or 112 & 9. sont 121.

USAGE.

Cette Proposition sert principalement pour démontrer que le Foyer d'une Parabole est éloigné de son sommet d'une quantité égale à la quatriéme partie du Parametre de l'axe, comme l'on peut voir dans le Traité des Sections Coniques de M. Ozanam.

Elle sert aussi pour resoudre autrement le

Problême, qui a déja été résolu dans la Proposition 5. comme vous allez voir. Trouver en nombres les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît le contour & l'aire. *Que le contour du rectangle ABCD soit de 28. pieds, & l'aire de 48. Prenez sur le plus grand côté AB prolongé, les deux lignes BE, BF, égales chacune à l'autre côté BC, & alors la ligne AE sera la somme des deux côtez AB, BC, & par consequent de 14. pieds, parce qu'elle est la moitié du contour, qui a été supposé de 28. pieds, & la ligne AF sera la difference des mêmes côtez que l'on pourra connoître en cette sorte.* Pl. 1. Fig. 8.

Puisque le quarré de la ligne AE ou 196. est égal à quatre rectangles sous les lignes AB, BE, ou AB, BC, ou à 192, & au quarré de la ligne AF, si de 196, on ôte 192. le reste 4. sera le quarré de la ligne AF, laquelle par consequent vaudra 2. Si de la ligne AE, on ôte AF, & si l'on ôte 2. de 14. il restera 12, pour la ligne EF, dont la moitié donnera 6. pour chacune des deux lignes égales BE, BF, c'est-à-dire, pour le plus petit côté BC. Et si à la ligne AF on ajoûte BF, ou 2 à 6, on aura 8 pour le plus grand côté AB. Ainsi les deux côtez AB, BC, seront connus.

Les deux Propositions 9. & 10. ne sont pas fort considerables, d'autant qu'on peut

s'en passer dans ces Elemens. Je ne les ai neanmoins pas obmises; mais vous pouvez les passer si vous voulez, pour vous attacher principalement à la 11. qui est très-considerable, & qu'il est bon d'entendre parfaitement.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

Si une ligne est divisee egalement, & inégalement; les quarrez des parties inégales seront doubles du quarré de la moitié de la ligne, & de celui de la partie d'entre-deux.

Pl. 1. Fig. 15. QU'ON divise la ligne AB en deux également, au point C, & inégalement, au point D. Les quarrez des parties inégales AD, DB, seront doubles des quarrez de AC, qui est la moitié de AB, & du quarré de l'entre-deux CD. Tirez à AB, la perpendiculaire CE, égale à AC: tirez aussi les lignes AE, BE, & la perpendiculaire DF; comme aussi FG, parallele à CD: tirez ensuite la ligne AF.

Démonstration.

Les lignes AC, CE, sont égales; & l'angle C est droit; donc (par la 5. du 1.) les

les angles CAE, CEA, ſont égaux & demi-droits. Pareillement les angles CEB, CBE, GFE, DFB ſont demi-droits, les lignes GF, GE, DF, DB ſont égales, & l'angle total AEB eſt droit. Le quarré de AE (par la 47. du 1.) eſt égal aux quarrez de AC, CE, qui ſont égaux: Donc il eſt double du quarré de AC. De même le quarré de EF eſt double du quarré de GF, ou CD: or le quarré de AF, eſt égal aux quarrez de AE, EF, puiſque l'angle AEF eſt droit; donc le quarré AF, eſt le double des quarrez de AC, CD. Ce même quarré AF eſt égal aux quarrez de AD, DF ou DB, puiſque l'angle D eſt droit: donc les quarrez de AD, DB, ſont doubles des quarrez de AC, CD.

Par les nombres.

Que AB ſoit 10; AC, 5; CD, 3; DB 2: les quarrez de AD, 8, & DB, 2; c'eſt-à-dire 64, & 4, qui font 68, ſont doubles du quarré AC qui eſt 25, & du quarré de CD, 3, qui eſt 9; car 25 & 9, font 34, qui eſt la moitié de 68.

USAGE.

Cette Propoſition ſert à réſoudre facilement le Problême ſuivant, qui ſans cela paroît plus difficile. Trouver les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît la diagonale, & la ſomme des deux côtez inégaux. Pl. 1. Fig. 17.

Que la diagonale AC du rectangle AB CD soit de 26 pieds, & la somme des deux côtez AB, BC, soit de 34 pieds. Prolongez le plus grand côté AB vers E, en faisant BE égale à BC, pour avoir la somme AE des deux côtez AB, BC, qui sera de 34 pieds : & divisez cette somme AE en deux également au point F, & chacune des deux moitiez AF, EF, sera de 17 pieds. Après cela faites le raisonnement suivant.

Puisque les quarrez des deux lignes AB, BE, c'est-à-dire, (par la 47. du 1.) le quarré de la seule ligne AC, ou 676, est double des quarrez des lignes AF, BF, sa moitié 338. sera la somme des quarrez des lignes AF, BF : & comme le quarré de AF est 289, il s'ensuit que si l'on ôte ce quarré 289 de la moitié precedente 338, il restera 49 pour le quarré de la ligne BF, laquelle par consequent vaudra 7. Si à la ligne AF on ajoûte BF, ou 17 à 7, l'on aura 24 pour le plus grand côté AB : & si de la ligne EF, on ôte la ligne BF, ou que de 17 l'on ôte 7, il restera 10 pour la ligne BE, ou pour son égale BC. Ainsi les deux côtez AB, BC, seront connus.

PROPOSITION X.

THEOREME.

Si on ajoûte une ligne à une autre divisée également ; le quarré de la ligne composée des deux, avec le quarré de l'ajoûtée, sont doubles du quarré de la moitié de la ligne, & du quarré de celle qui est composée de cette moitié & de l'ajoûtée.

SI on suppose la ligne AB, divisée par le milieu au point C ; & si on y ajoûte la ligne BD : les quarrez de AD, & de BD, seront doubles des quarrez AC & CD. Tirez les perpendiculaires CE, DF, égales à AC : tirez ensuite les lignes AE, EF, AG, EBG. Pl. 1. Fig. 18.

Démonstration.

Les lignes AC, CE, CB, étant égales, & les angles au point C étant droits, les angles AEC, CEB, CBE, DBG, DGB, seront demi-droits ; & les lignes BD, DG, EF, FG, CD, seront égales. Le quarré de AE, est double du quarré de AC : le quarré de EG, est aussi double du quarré de EF, ou CD, (par la 47. du 1.) Or le quarré AG, est égal aux quarrez de AE,

EG (par la 47. du 1.) Donc le quarré de AG est double des quarrez de AC, CD; le même AG (par la 47. du 1.) est égal aux quarrez de AD, DG, ou DB. Donc les quarrez de AD, BD, sont doubles des quarrez de AC, CD.

USAGE.

Pl. 1. Fig. 19. *On peut se servir de cette Proposition pour resoudre avec facilité le Problême suivant. Trouver les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît la diagonale, & la difference des deux côtez inegaux. Que la diagonale AC du rectangle ABCD soit de 26, & la difference des deux côtez AB, BC soit de 14. pieds. Pour trouver les deux côtez AB, BC, on raisonnera de la sorte. Retranchez du plus grand côté AB, la ligne BE égale au plus petit BC, & alors la ligne AE sera la difference de ces deux côtez AB, BC, & elle sera par consequent de 14. pieds: & si l'on divise cette difference AE en deux également au point F, chacune des deux moitiez AF, EF, sera de 7. pieds. Cela étant supposé, voici comment on peut connoître les deux côtez AB, BC.*

Parce que le quarré de la ligne AB, avec le quarré de la ligne BE, ou BC; c'est-à-dire (par la 47. du 1.) le quarré 676 de la diagonale AC, est double des quarrez des

lignes AF, BF, sa moitié 338. sera égale à la somme des mêmes quarrez AF, BF; c'est pourquoi si de cette moitié 338, on ôte le quarré 49. de la ligne AF, il restera 289 pour le quarré de la ligne BF, laquelle par consequent vaudra 17 : si l'on ajoûte la ligne AF à BF, ou 7 à 17, la somme donnera 24 pour le plus grand côté AB : & si l'on ôte la ligne EF de BF, ou 7. de 17, le reste donnera 10 pour BE ou BC, &c.

PROPOSIITON XI.

PROBLEME.

Diviser une ligne de telle sorte que le rectangle compris sous toute la ligne, & sous la plus petite de ses parties, soit égal au quarré de l'autre partie qui est plus grande.

ON propose la ligne AB à diviser en H, de telle sorte que le rectangle compris sous toute la ligne AB, & sous HB, soit égal au quarré de AH. Faites le quarré de AB (par la 46. du 1.) divisez AD par le milieu en E : tirez EB, & prenez EF égale à EB; faites le quarré de AF, c'est-à-dire, que AF, AH soient éga- Pl. 11 Fig. 20.

les. Je dis que le quarré de AH, qui eſt la plus grande partie de la ligne diviſée, ſera égal au rectangle HC, compris ſous HB qui eſt la plus petite partie, & la ligne BC, égale à AB.

Démonſtration.

La ligne AD eſt diviſée également au point E, & on y a ajoûté la ligne FA: donc (par la 6.) le rectangle DG compris ſous DF & FG, égale à AF, avec le quarré de AE, eſt égal au quarré de EF égale à EB. Or le quarré de EB eſt égal au quarré de AB, AE, (par la 47. du 1.) donc les quarrez de AB, AE ſont égaux au rectangle DG, & au quarré de AE; & ôtant de part & d'autre le quarré de AE, le quarré de AB, qui eſt AC, ſera égal au rectangle DG: ôtant auſſi le rectangle DH, qui eſt dans tous deux, le rectangle HC, ſera égal au quarré AG.

Pl. 1. Fig. 20.

USAGE.

Cette Propoſition ſert pour couper une ligne, ſelon l'extrême & la moyenne raiſon, ainſi que nous enſeignerons dans le 6. Livre, Propoſition 30. Elle revient ſouvent au 14. Livre des Elemens d'Euclide, pour trouver les côtez des corps reguliers; elle ſert pour la 10. Propoſition du quatriéme Livre, pour inſcrire un Pentagone dans un Cercle, comme auſſi un Pentadecagone,

Vous verrez d'autres Usages d'une ligne divisée de cette sorte, dans la Proposition 30. du Livre 6.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

Dans un Triangle obtus angle, le quarré du côté opposé à l'angle obtus, est égal aux quarrez des deux autres côtez, & à deux rectangles compris sur le coté, sur lequel prolongé, on a tiré une perpendiculaire, & sous la ligne qui est entre le Triangle, & cette perpendiculaire.

QUE l'angle ACB, du Triangle ABC, soit obtus; & qu'on tire du point A, AD perpendiculaire à BC prolongée; le quarré du côté AB est égal aux quarrez des côtez AC, CB, & à deux rectangles compris sous le côté BC, & sous DC. Pl. 7. Fig. 21.

Démonstration.

Le quarré de AB est égal aux quarrez de AD, BD (par la 47. du 1.) le quarré de DB est égal aux quarrez de DC, & de CB, & à deux rectangles compris sous DC, CB, (par la 4.) donc le quarré AB

eſt égal aux quarrez de AD, DC, CB, & à deux rectangles compris ſous DC, CB. Au lieu des deux premiers quarrez AD, DC, mettez le quarré AC qui leur eſt égal (par la 47. du 1.) le quarré de AB, ſera égal aux quarrez de AC & CB, & à deux rectangles compris ſous DC, CB.

USAGE.

Cette Propoſition ſert dans la Planimetrie, pour meſurer l'aire d'un Triangle, ſes trois côtez étant connus. Par exemple, ſi le côté AB étoit de 20. *pieds; AC de* 13, *BC de* 11. *le quarré de AB ſeroit de* 400. *Celui de AC de* 169, *& celui de BC de* 121, *la ſomme des deux derniers eſt* 290, *laquelle étant ſouſtraite de* 400, *laiſſe* 110 *pour les deux rectangles ſous BC, CD. La moitié* 55 *ſera un de ces rectangles; & le diviſant par BC,* 11, *nous aurons* 5 *pour la ligne CD. Son quarré eſt de* 25. *lequel étant ſouſtrait du quarré de AC* 169, *reſte le quarré de AD* 144, *& ſa racine* 12, *ſera le côté AD: laquelle étant multiplié par* $5\frac{1}{2}$ *moitié de BC, vous aurez l'aire du Triangle ABC, de* 60 *pieds quarrez.*

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

Dans quelque Triangle rectiligne que ce soit, le quarré du côté opposé à l'angle aigu, avec deux rectangles compris sous le côté sur lequel la perpendiculaire tombe, & sous la ligne qui est entre la perpendiculaire & cet angle, est égal aux quarrez des autres côtez.

SI on propose le Triangle ABC, qui ait l'angle C aigu, & si on tire AD perpendiculaire à BC: le quarré du côté AB opposé à l'angle aigu C, avec deux rectangles compris sous BC, DC, sera égal aux quarrez AC, BC. Pl 1. Fig. 22.

Démonstration.

La ligne BC est divisée en D: donc (par la 7.) les quarrez de BC, DC, sont égaux à deux rectangles compris sous BC, & DC, & au quarré de BD, ajoûtez le quarré AD, de côté & d'autre, les quarrez de BC, DC, AD, seront égaux à deux rectangles sous BC, CD, & aux quarrez de BD, AD. Au lieu des quarrez de CD, AD, mettez le quarré de AC qui leur est

égal (par la 47. du 1.) & au lieu des quarrez de BD, AD, ſubſtituez le quarré de AB, qui leur eſt égal, les quarrez BC, AC, ſeront égaux au quarré de AB, & à deux rectangles compris ſous BC, & DC.

USAGE.

Ces Propoſitions ſont fort utiles dans la trigonometrie; je m'en ſuis ſervi dans la huitieme Propoſition du troiſieme Livre, pour prouver que dans un Triangle, il y avoit même raiſon du Sinus total, au Sinus d'un angle, que du rectangle compris ſous les cotez qui forment cet angle au double du Triangle. Je m'en ſers auſſi dans pluſieurs autres Propoſitions comme dans la 7.



PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

Decrire un quarré égal à un rectiligne donné.

POUR décrire un quarré égal au rectiligne A; faites (par la 45. du 1.) un rectangle BCDE égal au rectiligne A. Si ces côtez CD, CB, étoient égaux, nous aurions ce que nous désirons : s'ils sont inégaux, continuez la ligne BC, de sorte que CF soit égal à CD ; & divisant la ligne BF, par le milieu au point G, décrivez le demi-Cercle FHB : enfin prolongez DC en H, le quarré de la ligne CH, est égal au rectiligne A. Tirez la ligne GH. Pl. 8. Fig. 25.

Démonstration.

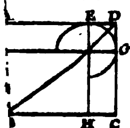
La ligne BF, est divisée également en G, & inégalement en C : donc (par la 5.) le rectangle compris sous BC, CD, ou CF, c'est-à-dire le rectangle BD, avec le quarré CG, est égal au quarré de GB, ou de GH son égal. (Or par

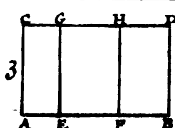
la 47. du 1.) le quarré de GH eſt égal aux quarrez de CG & CH : donc le rectangle BD ; & le quarré de CG ſont égaux aux quarrez de CG, & de CH. Et ôtant le quarré CG qui leur eſt commun ; le rectangle BD, ou le rectiligne A eſt égal au quarré de CH.

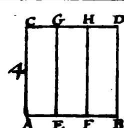
USAGE.

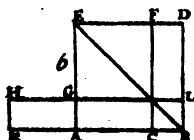
Cette Propoſition ſert premierement, pour reduire au quarré quelque rectiligne que ce ſoit : & comme le quarré eſt la premiere meſure de toutes les ſurfaces, à cauſe que ſa largeur, & ſa longueur ſont égales, nous meſurons par ce moyen toutes ſortes de figures rectilignes. Secondement, cette Propoſition nous enſeigne à trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, ainſi que nous verrons dans le ſixieme Livre.

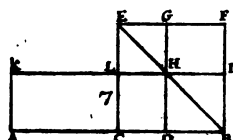


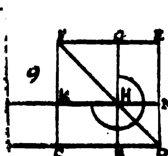

E D
O
H C

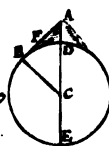

C G H D
3
A E F B

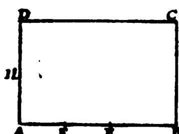

C G H D
4
A E F B

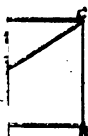

E F D
6
H G L
A C B

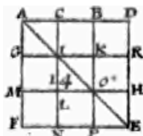

E G F
K L H I
7
A C D B

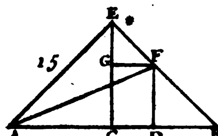

G E
9
K H N
C B D

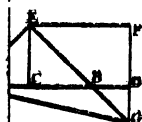

A
F
B D
10
C
E

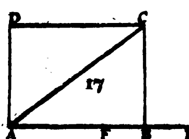

D C
11
A F E B

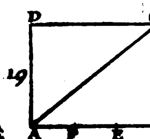

C
B

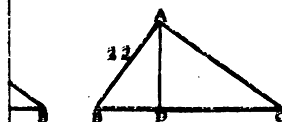

A C B D
G I K R
14 O
M H
L
F N P E

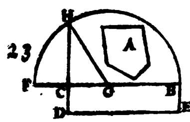

E
15
G F
A C D B

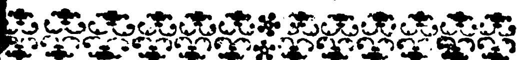

E F
C B D
G


D C
17
A F B E


D
19
A F E


A
22
B B D C


H
A
23
F C G B
D E



LIVRE TROISIE'ME.

DES ELEMENS

D'EUCLIDE.

CE troisiéme Livre explique les proprietez du Cercle, & compare les diverſes lignes qu'on peut tirer au dedans, & au dehors de ſa circonference. Il conſidere encore les circonſtances des Cercles, qui ſe coupent, ou qui touchent une ligne droite; & les differens angles qui ſe forment tant à leur centre, qu'à leur circonference. Enfin il donne les premiers principes, pour établir les pratiques de Géometrie, par leſquelles nous nous ſervons très-utilement du Cercle dans preſque tous les Traitez des Mathematiques.

DEFINITIONS.

1. *LEs Cercles égaux ſont ceux dont les diametres ſont égaux, ou dont*

les lignes droites menées du centre à la circonferenc, ſont égales.

Pl. 1. Fig. 1. *2. Les Cercles concentriques ſont ceux qui ſont décrits d'un même centre, tels que ſont les Cercles A & B, qui ont pour centre le point C, & dont les circonferences A & B ſont par tout également éloignées.*

Fig. 2. *3. Les Cercles excentriques ſont ceux qui n'ont pas le même centre, c'eſt-à-dire, qui ont été décrits de centres differens, & dont les circonferences ne ſont pas par tout également éloignees, comme les Cercles E & F.*

Fig. 3. *4. La Tangente d'un Cercle eſt une ligne droite qui touche la circonference ſans la couper, comme AB.*

Fig. 3. *5. La Secante au contraire, eſt une ligne qui coupe un Cercle, telle que la ligne AC.*

Fig. 5. *6. Deux lignes ſont dites également éloigneés du centre d'un Cercle, lorſque les perpendiculaires qu'on tire du centre ſur ces lignes ſont égales. Ainſi les lignes HI & KL ſeront également éloignées du centre G, ſi les perpendiculaires OG & GN ſont égales.*

Fig. 4. *7. Le Segment d'un Cercle eſt une figure terminée d'un côté par une ligne droite, & de l'autre par une partie de la circonference d'un Cercle, comme LON, LMN.*

8. *L'angle du Segment est l'angle mixte, compris de l'arc du segment & de sa base, comme l'angle OLN, ou NLM.* Fig. 4.

9. *Un angle est dans le segment dans lequel sont les lignes qui le forment, comme l'angle FGH est dans le segment FGH.* Fig. 6.

10. *Un angle est dessus l'arc auquel il est opposé, ou qui lui sert de base, comme l'angle FGH est dessus l'arc FIH.*

11. *Le secteur est une figure comprise sous deux demi-diametres, & sous l'arc qui leur sert de base, comme la figure FIGH.* Fig. 7.

12. *Des Cercles sont dits se toucher l'un l'autre, quand leurs circonferences se touchent sans se couper.*

13. *Deux Cercles sont dits se couper l'un l'autre, lorsque leurs circonferences ne se touchent pas simplement, mais qu'ils entrent reciproquement l'un dans l'autre.*

AVERTISSEMENT.

Nous avons supprimé la 2. *Proposition d'Euclide; & en la place de la* 1. *& de la* 4. *nous en avons substitué d'autres plus propres à démontrer celles qui les suivront. Euclide nous donne dans la premiere Proposition de ce Livre, le moyen de trouver le centre d'un Cercle : mais comme sa Démonstration est difficile, j'ai crû ne devoir*

parler de ce Problême qu'après la Proposition 3. qui est très-propre pour le demontrer.

PROPOSITION I.

THEOREME.

Les circonferences des Cercles concentriques, c'est-à-dire, qui ont le même centre, sont paralleles.

Fig. 1. CECI s'entend de soi-même ; car tous les rayons de la plus grande circonference, sont perpendiculaires à l'une & à l'autre, c'est-à-dire, que le rayon AB, est perpendiculaire sur la circonference B, comme sur la circonference C. Donc ôtant le rayon de la plus petite, c'est-à-dire AC, la partie CB qui reste entre les deux circonferences, sera la mesure de leur distance. Or tous les rayons tirez du centre A à la plus grande circonference, feront le même effet. Donc tous les points de chacune de ces circonferences seront également distans de tous les points de l'autre ; donc elles sont paralleles. C. Q. F. D.

PRO-

PROPOSITION III.

THEORÈME.

Si dans un Cercle une ligne droite passe par le centre, & coupe en deux également une autre ligne droite qui n'y passe point, elle la coupera perpendiculairement; & si elle la coupe perpendiculairement, elle la coupera en deux également.

JE suppose premierement que la ligne droite BD, qui est dans le Cercle ABCD, passe par le Centre E, & qu'elle coupe en deux également au point F, la ligne AC qui n'y passe point; cela étant, je dis que la ligne BD, coupe la ligne AC perpendiculairement. Pour le prouver. Fig. 3

Menez les lignes droites AE, EC, cela posé. Dans les Triangles AFE & CFE, le côté AF est égal au côté FC par la supposition, le côté FE est commun à ces deux Triangles. De plus la base EA est égale à la base EC, par la définition du Cercle; donc (par la 8. du 1.) l'angle AFE est égal à l'angle CFE, & la ligne BD est perpendiculaire à AC. C. Q. F. D.

Je suppose en second lieu, que la ligne

K

BD qui passe par le centre du Cercle; coupe la ligne AC perpendiculairement; cela étant, je dis qu'elle la coupe aussi en deux également.

Fig. 9. Pour le prouver. Puisque les lignes EA, EC, sont égales par la définition du Cercle, les angles EAC & ECA sont égaux (par 5. du 1.) d'ailleurs puisque la ligne BF est perpendiculaire à la ligne AC, les deux angles EFA, EFC sont aussi égaux; si bien que les deux Triangles EFA, EFC ont deux angles égaux chacun au sien, ainsi ils les auront tous trois égaux & comme le côté EF qui est commun aux deux triangles, soutient des angles égaux; il s'ensuit (par la 26. du 1.) que le côté AF est égal au côté FC. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

Probleme.

Trouver le centre d'un Cercle.

Fig. 10. Pour trouver le centre du Cercle X, tirez la corde CD, laquelle étant divisée en deux également au point E, il faut y élever la perpendiculaire EF, qui venant aboutir à la circonference, sera

le diametre du Cercle (par la précedente.) Cela étant, elle doit passer par le centre; si on divise donc cette ligne en deux également au point H, on aura ce qu'on cherche.

PROPOSITION V & VI.

THEOREME.

Les Cercles qui se touchent, non plus que ceux qui se coupent en dedans, n'ont pas le même centre.

IL est bien évident (par la Définition 2. & par la Prop. 1.) que si deux Cercles se coupent, leurs circonferences ne seront point paralleles, n'étant point concentriques : cela étant, ils ne peuvent avoir le même centre; pareillement s'ils se touchent en dedans, leurs circonferences ne seront point paralleles; or n'étant point paralleles, ils ne peuvent avoir le même centre.

Nous passerons les propositions 7, & 8. comme étant peu considerables.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

D'un point pris dans un Cercle, qui n'est pas le centre, on ne peut tirer que deux lignes égales à la circonference, & il n'y a que du centre qu'on puisse en tirer trois.

Fig. 11. JE dis que du point A on ne peut tirer que deux lignes égales à la circonference, & pour le prouver, faites que l'angle CBA soit égal à l'angle ABD. Tirez aussi les lignes CA & AD.

Démonstration.

Nous avons deux Triangles qui ont chacun un angle égal par la construction. Le côté AB est commun, & les lignes CB & BD sont égales, ayant été tirées du centre B; donc (par la 4.) les bases CA & AD seront égales; ainsi voilà deux lignes droites menées du point A à la circonference, qui sont égales. Mais qu'on ne puisse pas mener une troisiéme égale aux deux autres, cela est évident; car cette ligne approchera, ou s'éloignera plus ou moins du point F, que ne font les lignes CA & AD, ce qui causera l'inéga-

lité. Il n'y a donc que du centre B d'où l'on puisse tirer à la circonference plus de deux lignes égales. C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THEOREME.

Si deux Cercles se coupent, ils ne peuvent se couper qu'en deux points.

JE suppose que les deux Cercles ABDE & FBCE se coupent l'un l'autre ; cela étant, je dis qu'ils ne se peuvent couper qu'en deux points. Supposons néanmoins, s'il est possible, qu'ils se coupent l'un l'autre aux trois points A, B, D ; cela posé, trouvez (par la 4.) le centre H du Cercle ABDE ; puis du centre menez aux trois points où ces Cercles se coupent, les rayons HA, HB & HD. Fig. 13.

Démonstration.

Le point H étant le centre du Cercle ABDE, les lignes qu'on vient de tirer à sa circonference sont égales entr'elles ; mais ces trois lignes là vont aussi se terminer à la circonference du Cercle FBCE ; il s'ensuivroit donc que le point H seroit le centre commun de ces deux Cer-

cles, puisqu'on a tiré trois égales à leurs circonferences; mais deux Cercles qui se coupent ne pouvant avoir le même centre; il est donc impossible qu'ils puissent se couper à plus des deux points. C. Q. F. D.

Nous passerons la Proposition 11. n'étant point considerable.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

Si deux Cercles se touchent par le dehors, la ligne tirée par leurs centres passera par le point d'attouchement.

Fig. 15. JE suppose que les Cercles ABC, DBE se touchent l'un l'autre par dehors au point B, & que du centre de l'un au centre de l'autre, on ait mené la ligne droite FG; cela étant, je dis que cette ligne passe par leur point d'attouchement.

Démonstration.

Posons donc, s'il est possible, qu'elle passe par les points C & E, & qu'ainsi la ligne FCEG, soit une ligne droite; cela étant, les deux lignes BF, BG, ne concourreront pas directement, & ainsi feront un angle au point B, & avec la troi-

siéme FCEG, feront un Triangle, dont les deux côtez BF, BG feront enfemble plus grand que le troifiéme FCEG (par la 20. du 1.) Mais les lignes FC, GE font égales à BF, BG (par la définition du Cercle) donc ces mêmes lignes FC, GE feroient auffi plus grandes que la ligne entiere FCEG, c'eft-à-dire, la partie que le tout, ce qui eft impoffible; il eft donc impoffible que la ligne qui eft menée par les centres F & G, paffe par un autre point que B. C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

Deux Cercles fe touchent feulement dans un point.

PRemierement, fi deux Cercles fe touchent en dedans, ils ne fe toucheront qu'en un feul point C, marqué par la ligne BAC, qui paffe par leurs centres A & B; car s'ils fe touchent encore au point D, tirez les lignes AD, BD.

Démonftration.

Les lignes AD, AC étant tirées du centre du petit Cercle, font égales, & ajoû- Fig. 123

tant AB, les lignes BA, AC, & BA, AD seroient égales : or BC, BD étant tirées du centre du grand Cercle, seroient aussi égales ; donc les côtez BA, AD seroient égaux au seul côté BD, ce qui est contraire à la Proposition 20. du 1.

Secondement, si les deux Cercles se touchent en dehors, tirant la ligne AB d'un centre à l'autre ; elle passera par le point C où les Cercles se touchent (par la 12.) car si vous dites qu'ils se touchent encore au point D, ayant tiré les lignes AD, BD ; les lignes BD, BC, AC, AD étant égales, les deux côtez d'un Triangle pris ensemble seroient égaux au troisiéme ; ce qui est contraire à la Proposition 20. du 1.

USAGE.

Les Propositions precedentes s'entendent pour ainsi dire d'elles-mêmes, je les ai neanmoins voulu demontrer pour accoutumer ceux qui commencent la Geometrie, à ne recevoir pour vrai, que ce qui leur a été prouvé. Quant à l'usage qu'on peut faire de ces trois Propositions, on peut s'en servir dans l'Astronomie, pour expliquer le mouvement des Planettes quand on se sert d'Epycicles.

PRO-

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

Les lignes égales tirées dans un Cercle, sont également éloignées du centre; & celles qui sont également éloignées du centre, sont égales.

JE dis que si les lignes AB & CD sont également éloignées du centre E, elles seront égales: tirez les lignes EG & EH perpendiculaires sur AB, CD, elles seront égales par la définition 6. On sçait aussi (par la Proposition 3.) que ces perpendiculaires divisent en deux également les lignes AB & CD, aux points G & H. Tirez les lignes ED & EB qui seront des rayons du Cercle, puisqu'elles sont tirées du centre E. Pl. 2. Fig. 18.

Démonstration.

Je dis premierement, que les Triangles rectangles BGE & EHD ont tous leurs côtez égaux; car on sçait que les lignes BE & ED sont égales, aussi bien que les deux autres GE & EH: or les quarrez de ces lignes égales seront égaux entr'eux; & (par la 47. du 1.) le quarré GE ne

pourra valoir le quarré EB, qu'en lui ajoûtant le quarré GB : pareillement le quarré EH ne pourra valoir le quarré ED ou EB, qu'en lui ajoûtant le quarré HD; mais comme les quarrez des côtez EG & EH sont égaux, il s'ensuit que les quarrez des côtez GB & HD, le seront aussi, partant GB & HD sont des lignes égales ; & comme elles sont les moitiez des lignes AB & CD, je conclus que ces lignes sont aussi égales.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

De toutes les lignes qu'on peut tirer dans un Cercle, celle qui passe par le centre, est la plus grande; & celle qui approche le plus du centre, est plus grande que celle qui en approche le moins.

Pl. 2. Fig. 19. SOit donc la ligne DE qui passe par le centre C, qui sera par conséquent le diametre ; il faut démontrer que cette ligne est plus grande que AB ; tirez les rayons CA & CB.

Démonstration.

Dans le Triangle ACB, les deux côtez

AC & CB pris ensemble, sont plus grands que le troisiéme AB (par la 20. du 1.) or comme ces deux côtez CB & AC sont égaux à la ligne DE, il s'ensuit que cette ligne DE sera plus grande que AB.

Présentement considerez que plus les extrêmitez A & B des rayons AC & CB approcheront de D & de E, plus l'angle ACB sera ouvert; & par conséquent le côté AB deviendra plus grand, étant opposé à un angle plus ouvert; donc plus une ligne approche du centre, plus elle excede sur une autre qui en est plus éloignée.

USAGE.

Cette Proposition peut servir considerablement pour connoître le rapport des Cercles paralleles qui sont decrits sur une sphere, & trouver combien ceux qui sont renfermez entre le Pole & l'Equateur, sont plus petits que celui qui a pour diametre celui de la Sphere.



PROPOSITION XVI.

THEOREME.

Une ligne perpendiculaire à l'extrêmité d'un rayon, touche le Cercle, & ne le touche qu'à un seul point.

Fig. 20. JE dis que si la ligne BD est perpendiculaire sur le rayon BK, elle ne touchera le Cercle qu'au seul point B.

Demonstration.

Pour démontrer que la ligne BD, ne peut toucher le Cercle à un second point C; je mene une ligne de K en C; après quoi je dis que le point C de la touchante ne peut toucher le Cercle: car pour démontrer qu'il le touche, il faudroit faire que les lignes BK & KC soient égales; ce qui ne peut être: car (par la 47. du 1.) le Triangle CBK étant rectangle en B, le quarré BK sera toûjours plus petit que le quarré de l'hypotenuse KC, & par conséquent la ligne KC sera plus grande que le rayon BK. Ce qui fait voir que le point C est au-delà de la circonference; & que la ligne BD ne touche le Cercle qu'au seul point B. C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

D'un point pris hors d'un Cercle, tirer une ligne qui le touche.

SOit A le point donné duquel il faut mener une Tangente au Cercle X, après avoir tiré la ligne AB, de A en B centre du Cercle X; il faut décrire sur cette ligne comme diametre le demi-Cercle ABC, & au point de section C, mener AC qui sera la Tangente qu'on cherchoit. La démonstration en est facile, comme on le verra dans la Proposition 31, où l'on prouve qu'un angle tel que BCA qui est renfermé dans un demi-Cercle est droit. Cela étant, la ligne CA sera démontrée être la Tangente, si elle est perpendiculaire sur le rayon BC, par la Proposition précedente. Pl. 1. Fig. 14.

Je ne me suis point servi de la méthode d'Euclide pour résoudre ce Problême, m'ayant paru trop composée.

USAGE.

Il est necessaire de sçavoir mener une Tangente à un Cercle par un point donné,

car l'usage en est fort étendu dans la Trigonometrie; c'est ce qui a obligé les Geometres d'en faire des Tables qui servent à mesurer toutes sortes de Triangles, même les spheriques.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

La ligne tirée du centre d'un Cercle, au point où une ligne droite le touche, est perpendiculaire à la même ligne.

Pl. 2. Fig. 20. BD est une Tangente, & je tire du centre K, le rayon KB, que je dis être perpendiculaire sur la Tangente au point B où elle touche le Cercle.

Demonstration.

On peut connoître aisément (par la 16.) que puisqu'une ligne Tangente à l'extrêmité du rayon d'un Cercle, est perpendiculaire sur le même rayon, elle le sera pareillement, si l'on tire une ligne du centre au point d'attouchement; car la ligne KB étant la plus courte qu'on peut tirer du point K au point B, il est aisé de voir que toute autre ligne qu'on tireroit du point K d'un côté ou d'autre, du point

B ne seroit point perpendiculaire, puisque d'un point donné hors d'une ligne, on n'en peut tirer qu'une perpendiculaire.

La Proposition 19. d'Euclide n'étant qu'une répetition de la précedente, j'en ai substitué une autre qui servira comme de Lemme à celles qui suivent.

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

Si la Tangente d'un Cercle fait avec la Corde d'un arc, un angle au point d'attouchement, l'angle aura pour mesure la moitié de cet arc.

JE veux prouver que l'angle BAC formé par la Tangente AB, & la Corde AC, a pour mesure la moitié de l'arc AFC. Tirez du centre D, la ligne DA sur le point d'attouchement, laquelle sera perpendiculaire sur la Tangente. Tirez pareillement DF perpendiculaire sur la Corde AC, laquelle sera divisée en deux également au point E. Fig. 21.

Démonstration.

L'angle BAD est droit (par la 16.) & le Triangle ADE est rectangle ayant l'an-

gle droit E; cela étant, les angles EAD & ADE vaudront un droit. Or l'angle DAE ne peut valoir un droit qu'en lui ajoûtant l'angle CAB, ou ADE; il s'ensuit donc que les angles ADF & CAB sont égaux; & comme l'angle ADF a pour mesure l'arc AF qui est la moitié de l'arc AC, je conclus que l'angle BAC qui lui est égal, aura aussi pour mesure la moitié de l'arc AC. C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

L'angle qui a son sommet à la circonference d'un Cercle, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il s'appuye, & l'angle du centre est double de celui de la circonference.

Fig. 22. ON veut prouver que l'angle BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC; & que cet angle BAC qui est à la circonference, est moitié de l'angle O qui est au centre. Tirez par le sommet de l'angle A, la Tangente DE.

Démonstration.

La Tangente DE fait trois angles dont

le point angulaire commun eſt A, ces angles DAB, BAC, & CAE ſont égaux à deux droits : c'eſt-à-dire, quils auront enſemble pour meſure la moitié de la circonference du Cercle, qui eſt la même choſe que les moitiez des arcs AB, BC, & CA ; mais l'angle DAB a pour meſure la moitié de l'arc AB ; & l'angle EAC la moitié de l'arc AC par la précedente ; donc l'angle BAC a pour meſure la moitié de l'arc BC.

Enfin l'angle du centre O, eſt double de l'angle BAC, qui eſt à la circonference ; ce qui eſt bien évident, car l'angle du centre a pour meſure l'arc CB ; & on ſçait que l'angle BAC n'en a que la moitié ; donc l'angle O eſt double de l'angle BAC. C. Q. F. D.

USAGE.

On ſe ſert très-utilement de cette Propoſition dans l'Aſtronomie pour déterminer l'apogée du Soleil, & l'excentricité de ſon Cercle, par trois obſervations. On ſuppoſe pour cela que l'angle du centre eſt double de celui de la circonference. Ptolomée s'en ſert fort bien pour déterminer l'Epycicle de la Lune. On peut voir dans notre Traité de Trigonometrie combien cette Propoſition eſt conſiderable, & on peut dire que c'eſt une des belles proprietez du Cercle.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

Les angles qui sont dans les mêmes segmens de Cercle, ou qui ont les mêmes arcs pour bases, sont egaux.

Fig. 23. ON peut prouver aisément que les angles C & B sont égaux, puisque s'appuyant sur l'arc DAE, ils ont chacun pour mesure la moitié de ce même arc.

Après avoir demontré que l'angle de la circonference a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il s'appuye; considerons les angles qui peuvent se former dans un Cercle, dont le sommet n'est ni au centre, ni à la circonference, c'est ce que nous allons voir dans les deux Corollaires suivans.

COROLLAIRE I.

Fig. 24. Voici l'angle ABC qui n'est ni au centre, ni à la circonference; on demande quelle est la partie du Cercle qui peut déterminer sa mesure. Prolongez les côtez AB, BC jusqu'à la circonference EF: je dis que cet angle aura pour mesure la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc EF; ayant tiré la ligne FC, on aura le

Triangle BCF. On sçait que l'angle exterieur ABC est égal aux deux autres interieurs F & C (par la 32. du 1.) or comme cet angle exterieur est celui dont nous cherchons la mesure ; il est évident que la mesure des angles F & C pris ensemble, sera ce qu'on demande. Or la mesure de l'angle AFC, est la moitié de l'arc AC ; & celle de l'angle ECF, est la moitié de l'arc EF, donc la moitié de ces deux arcs pris ensemble sera la mesure de l'angle ABC.

COROLLAIRE. II.

Voici un angle hors du Cercle dont les côtez viennent se terminer sur la circonference concave. On demande encore quelle est la partie du cercle qui doit mesurer l'angle BAC ; je dis que c'est la moitié de l'arc BC, moins la moitié de l'arc DE ; ayant tiré la ligne DC, on aura le Triangle DAC, dont l'angle exterieur BDC est égal aux deux autres interieurs A & C. Or comme l'angle BDC moins l'angle C, est égal à l'angle A ; & que la mesure de l'angle BDC, est la moitié de l'arc BC ; & celle de l'angle C est la moitié de l'arc DE, il s'ensuit qu'en ôtant la moitié de cet arc DE, de la moitié de l'arc BC, la difference sera la mesure de l'angle A. Fig. 26

PROPOSITION XXII.

THEOREME.

Les figures quadrilateres inscrites dans un Cercle, ont les angles opposez égaux à deux droits.

Fig. 26. IL est aisé de démontrer que les deux angles opposez A & C pris ensemble, valent deux droits; car l'angle A ayant pour mesure la moitié de l'arc BCD, & l'angle C ayant pareillement pour mesure la moitié de l'arc BAD : ces deux angles auront donc pour mesure la moitié de la circonference du Cercle, & comme cette moitié est la mesure des deux droits, il s'ensuit que les angles A & C, vaudront deux droits; par la même raison les deux B & D vaudront aussi deux droits.

USAGE.

On peut par cette Proposition prouver que les deux côtez d'un Triangle obtusangle ont entr'eux la même raison que les Sinus des angles opposez. Ce que j'ai démontré clairement dans notre Traité de Trigonometrie.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

Deux semblables segmens de Cercle décrits dessus la même ligne sont égaux.

J'Appelle des semblables segmens de Cercle, ceux qui contiennent des angles égaux, & je dis que s'ils sont décrits sur la même ligne AB, ils sont égaux, & ne se surpasseront en aucun endroit; car s'ils se surpassoient, ainsi que font les segmens ABD, ACB, ils ne seroient pas semblables, & pour le démontrer, tirez les lignes ADC, BD, & BC. Pl. 13 Fig. 16.

Demonstration.

L'angle ADB est exterieur, en égard au Triangle DBC: donc (par la 32. du 1.) il est plus grand que l'angle ACB, & par conséquent les segmens ADB, ACB contiennent des angles inégaux; ce que j'appelle être dissemblables.



PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

Deux semblables segmens de Cercle décrits sur des lignes egales, sont égaux.

Pl. 1. Fig. 17. SI les segmens de Cercle AEB, CFD sont semblables, & si les lignes AB, CD sont égales, ils seront égaux.

Demonstration.

Qu'on s'imagine que la ligne CD est posée sur la ligne AB, elles ne le surpasseront pas l'une & l'autre; puisqu'on suppose qu'elles sont égales, & pour lors les segmens AEB, CFD seront décrits sur la même ligne; ils seront donc égaux par la précedente.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

Achever un Cercle dont nous n'avons qu'une partie.

Pl. 2. Fig. 27. ON nous donne l'arc ABC, & nous voulons achever le Cercle; il ne

faut que chercher son centre ; tirez les lignes AB, BC, & les ayant divisées par le milieu en D & E, tirez-leur deux perpendiculaires DI, EI, qui se rencontreront au point I, centre du Cercle.

Démonstration.

Le centre est dans la ligne DI (par la 4.) il est aussi dans EI (par la même) il est donc dans le point I.

USAGE.

Cette Proposition est très-utile pour connoître le diametre d'un Cercle dont on n'a qu'un arc ; la plupart des voutes sont faites en arc de Cercle, lorsqu'elles ne sont pas a plein centre ; si on veut en faire le toisé, il faut necessairement connoître la valeur de cette partie de Cercle, ce qu'on ne peut trouver sans le diametre ; mais comme on ne peut point agir dans ces occasions-là, comme on fait sur le papier, c'est-à-dire, qu'on ne peut se servir du Compas pour trouver le diametre d'une voute ; nous donnerons à la fin de la proposition 25. une methode qui peut servir à surmonter cette difficulté.



PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

Les angles égaux qui sont ou au centre, ou a la circonference des Cercles, ont pour base des arcs égaux.

Fig. 28. SI dans cette figure les angles égaux D & I, sont au-centre des Cercles égaux ABC, EFG; les arcs BC, FG seront égaux; car si l'arc BC étoit plus grand ou plus petit que l'arc FG, puisque les arcs sont les mesures des angles, l'angle D seroit ou plus grand, ou plus petit que l'angle I.

Que si les angles égaux A & E sont à la circonference des Cercles égaux; les angles D & I, qui sont doubles des angles A & E étant égaux, les arcs BC, FG seront aussi égaux.



PRO-

PROPOSITION XXVII.

THEOREME.

Les angles qui sont ou au centre, ou à la circonference des Cercles égaux, & qui ont des arcs égaux pour base, sont aussi égaux.

SI dans les deux figures précedentes les angles D & I sont au centre des Cercles égaux ; & s'ils ont pour base des arcs égaux BC, FG, ils seront égaux, parce que leurs mesures BC, FG sont égales. Que si les angles A & E étant à la circonference des Cercles égaux, ont pour base des arcs égaux BC, FG : les angles du centre seront égaux ; & ceux qui sont leur moitié (par la 20.) seront aussi égaux. Fig. 28.

Les Propositions 28. & 29. ne font, pour ainsi dire, que répeter les précedentes, c'est pourquoi nous les passerons.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

Diviser un arc de Cercle en deux également.

ON propose l'arc AEB à diviser en deux également ; mettez le pied du Fig 29.

Compas au point A, & faites les deux arcs F & G. Puis le transſportez ſans l'ouvrir ni fermer au point B. Décrivez deux autres arcs qui coupent les premiers en F & en G. Si on tire la ligne FG, elle coupera en deux également l'arc propoſé au point E, tirez la Corde AB.

On connoît aiſément que la ligne AB eſt diviſée également au point D, par la perpendiculaire FG. Or le centre du Cercle doit ſe trouver dans cette ligne (par la 4.) ſuppoſons que ce ſoit le point C; après avoir tiré les rayons CB & CA, on aura deux Triangles rectangles, qui ont tous leurs côtez égaux; ce qui ſe prouve de ſoi-même. Donc (par la 8.) les côtez AD & DB étant égaux, les angles ACE & ECB qui leur ſont oppoſez, le seront auſſi. D'où je conclus que les arcs AE & EB ſont égaux, puiſqu'ils ſont chacun la meſure des angles égaux.



PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

L'angle qui est dans un demi-Cercle est droit ; celui qui est compris dans un plus grand segment, est aigu ; & celui qui est dans un plus petit est obtus.

Démonstration.

L'Angle BAC qui est renfermé dans un demi-Cercle est droit, puisque s'appuyant sur le diametre BC, il a pour mesure la moitié du demi-Cercle BEC. Fig. 30.

L'angle EAC renfermé dans le grand segment de Cercle EBAC, sera aigu, puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc EC qui est moindre qu'un demi-Cercle.

L'angle FAC sera obtus, puisque sa mesure est la moitié de l'arc FEC, qui est plus grand qu'un demi-Cercle.

USAGE.

Par cette Proposition les Ouvriers ont le moyen de connoître si leur équierre est juste ; soit donc l'équierre DAB. On veut voir si l'angle A est positivement droit : ayant tiré la ligne DB, il faut la diviser par le milieu au point C, lequel sera le Fig. 31.

centre d'un Cercle qui doit passer par les trois points D, A, B; la ligne DB étant le diametre, l'angle A sera droit s'il touche la circonference, puisqu'il aura pour mesurer la moitié de l'arc DOB, qui est un quart de Cercle.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME

La ligne qui coupe le Cercle au point de l'attouchement, fait avec la touchante des angles égaux à ceux des segmens alternes.

Fig. 31. QUE la ligne BD coupe le Cercle au point B, qui est celui où la ligne AC le touche; je dis que l'angle CBD, que la ligne BD comprend avec la touchante BC, est égal à l'angle F, qui est celui du segment alterne BFD; & que l'angle ABD est égal à l'angle E du segment BED.

Démonstration.

Ceci est facile à démontrer; car l'angle ABD, formé par la touchante & la Corde, a pour mesure la moitié de l'arc BOD: il sera donc égal à l'angle BED

du segment alterne, puisque cet angle a aussi pour mesure la moitié du même arc BOD sur lequel il s'appuye. Par la même raison, l'angle CBD ayant pour mesure la moitié de l'arc BED, sera égal à l'angle F, lequel s'appuyant sur le même arc BED, doit en avoir aussi la moitié pour mesure. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME.

Décrire sur une ligne un segment de Cercle capable d'un angle donné.

NOus entendons par un segment capable d'un angle donné, un arc sur lequel l'angle CDA s'appuyant, l'a pour mesure. Faites sur la ligne AB, l'angle BAC égal à l'angle G; élevez sur le point A, la perpendiculaire AD: pareillement élevez sur AC la perpendiculaire CD. Cela étant fait, on aura le Triangle rectangle ADC; ayant divisé l'hypotenuse en deux également au point F, lequel étant pris pour centre d'un Cercle qui doit passer par les points A, C, D, on aura le segment CAO capable de l'angle donné G, ce qui est bien évident; car l'angle G étant égal à l'angle BAC, ils auront chacun pour me- Fig. 32.

fure la moitié de l'arc AOC (par la 19.) l'angle CDA qui eſt à la circonference ſera auſſi égal à l'angle G ; puiſqu'il a pour meſure la moitié de l'arc AOC ſur lequel il s'appuye. C. Q. F. F. & D.

Fig. 32. Comme la Propoſition 34. eſt, pour ainſi dire, la même que celle-ci, pour ne la point ſéparer, nous dirons que ſi l'on vouloit couper dans un Cercle un ſegment capable d'un angle donné, ayant tiré au Cercle une Tangente telle que AB, & du point d'attouchement ayant fait l'angle BAC égal à l'angle donné G, on aura le ſegment COA qui eſt ce qu'on cherche.

PROPOSITION XXXV.

THEOREME.

Si deux lignes ſe coupent dans un Cercle, le rectangle compris ſous les parties de l'une, eſt égal au rectangle compris ſous les parties de l'autre.

Fig. 33. PRemierement, ſi les deux lignes ſe coupent au centre du Cercle, elles feront égales & diviſées également ; ainſi il eſt évident que le rectangle compris ſous les parties de l'une, eſt égal au rectangle compris ſous les parties de l'autre.

Fig. 33. Secondement, que l'une des lignes

passe par le centre F, comme AC, & divise la ligne BD en deux également au point E; je dis que le rectangle compris sous AE, EC, est égal au rectangle compris sous BE, ED, c'est-à-dire au quarré de BE, la ligne AC est perpendiculaire, à BD (par la 3.) Fig. 33.

Démonstration.

Puisque la ligne AC est divisée également en F, & inégalement en E; le rectangle compris sous AE, EC, avec le quarré de EF, est égal au quarré de FC, ou FB (par la 5. du 2.) Or l'angle E étant droit, le quarré FB est égal aux quarrez de BE, EF. Donc le rectangle compris sous AE, EC avec le quarré de EF, est égal aux quarrez de BE, EF: & ôtant de part & d'autre le quarré de EF, reste que le quarré de BE est égal au rectangle sous AE & EC. Fig. 33.

Troisiémement, que la ligne AB passe par le centre F, & qu'elle divise inégalement la ligne CD au point E. Tirez du centre GF perpendiculaire à CD: & (par la 3.) les lignes GC, GD seront égales. Fig. 34.

Démonstration.

Puisque la ligne AB est divisée également en F, & inégalement en E, le rectangle compris sous AE, EB, avec le quarré de EF, est égal au quarré de BF,

ou FC (par la 5. du 2.) au lieu de EF; mettez les quarrez FG, GE qui lui sont égaux (par la 47. du 1.) pareillement la ligne CD étant divisée également en G, & inégalement en E; le rectangle CE, ED, avec le quarré de GE, sera égal au quarré de GC. Ajoûtez le quarré de GF, le
Fig. 34. rectangle CE, ED, avec les quarrez de GE, FG, sera égal aux quarrez de GC, GF; c'est-à-dire (par la 47. du 1.) au quarré de CF: donc le rectangle AE, EB avec les quarrez de GE, GF; & le rectangle de CE, ED avec les mêmes quarrez sont égaux: & par conséquent ôtant ces mêmes quarrez, le rectangle AE. EB, est égal au rectangle CE, ED.

Quatriémement, que les lignes CD, HI, se coupent au point E, & que ni l'une ni l'autre ne passe par le centre. Je dis que le rectangle CE, ED, égal au rectangle HE, EI. Car tirant la ligne AFB, les rectangles CE, ED, HE, EI sont égaux au rectangle AE, EB (par le cas précedent, donc ils sont égaux entr'eux.

Usage.

Fig. 33. *On peut par le second cas de cette Proposition, trouver aisement le diametre d'un arc de Cercle, dont on connoît la Corde & la perpendiculaire élevée sur son milieu. Soit par exemple l'arc du Cercle BCD, si l'on connoît*

connoît la Corde BD après l'avoir divisée par le milieu au point E, ayant élevé la perpendiculaire CE que je suppose être de 4. pieds, & la Corde BD de 12. il faut prendre la moitié de la Corde, & la multiplier par elle-même, c'est-à-dire, multiplier 6 par 6, le produit 36 étant divisé par 4, valeur de la perpendiculaire, on aura 9 pour quotient, qui sera la difference du diametre à la perpendiculaire. Donc si l'on ajoûte le quotient au diviseur, on aura 13 valeur du diametre. Cette pratique est très-utile, comme je l'ai déja dit, pour trouver la valeur des portions de Cercle quand on veut faire le toisé des voutes qui sont de cette nature.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

Si d'un point pris hors d'un Cercle on tire une ligne Tangente, & une autre qui aille se terminer sur la circonference concave, le quarré de la touchante sera égal au rectangle compris sous toute la ligne qui coupe le Cercle, & sous la partie exterieure.

SI du point A hors du Cercle, on tire la Tangente AB, & la Secante AC, je dis que le quarré de la Tangente AB Fig. 35.

est égal au rectangle compris sous toute la ligne AC, & la partie exterieure AD. Supposons en premier lieu, que cette ligne passe par le centre E, tirez la ligne EB perpendiculaire sur le point d'attouchement B.

Démonstration.

Fig. 35. Le Triangle ABE est rectangle en B, puisque le rayon BE a été tiré perpendiculaire sur le point d'attouchement; la ligne DC est divisée également au point E; on lui a ajoûté la ligne AD. Donc (par la 6. du 2.) le rectangle compris sous la composée des deux, & sous l'ajoûtée AD, avec le quarré du milieu DE, sera égal au quarré de AE; or ce quarré est égal aux deux autres AB & BE; comme le quarré DE est égal au quarré BE, puisqu'ils sont les rayons du Cercle; il s'ensuit donc que le quarré DE est commun au rectangle compris sous AC & AD, & au quarré AB: cela étant, si on ôte à tous deux ce quarré du milieu, le rectangle sera égal au quarré de la touchante.

Supposons maintenant que la ligne AC ne passe point par le centre, & qu'elle ait prise la situation de la ligne AH; cela étant, je dis encore que le rectangle de AH, AF est égal au quarré de AB. Pour le prouver, menez du centre E au point B la ligne droite EB; cette ligne (par la 18.)

ſera perpendiculaire à AB ; de ce même centre abaiſſez la ligne EG perpendiculaire à AH, cette ligne EG (par la 3.) coupera la partie FH, qui eſt dans le Cercle en deux également. Enfin de ce même point menez les deux lignes droites EF, EA, cela poſé. Fig. 3.

Puiſque la ligne FH eſt coupée en deux parties égales au point G, & que la ligne AF lui eſt ajoûtée ; il s'enſuit (par la 6. du 2.) que le rectangle compris de AH, AF, avec le quarré de GF, eſt égal au quarré de GA ; ſi donc à ces deux touts qui ſont égaux, on ajoûte le quarré de GE, il s'enſuivra que le rectangle de AH, AF, & les deux quarrez de GF & de GE ſeront égaux aux deux quarrez de GE & de GA. Or les deux quarrez de GF & de GE ſont égaux au quarré de EF, ou de ſon égal EB (par la 47. du 1.) & de même les deux quarrez de AG & de GE ſont égaux au quarré de EA ; ſi donc au lieu des deux quarrez de GF & de GE, on prend le quarré de EB ; & au lieu des deux quarrez de GA & de GE, on prend le quarré de EA ; il s'enſuivra que le rectangle compris de AH, AF, avec le quarré de EB, ſera égal au quarré de EA. Mais les deux quarrez de AB & de EB ſont auſſi égaux au quarré de EA (par la Fig. 1.

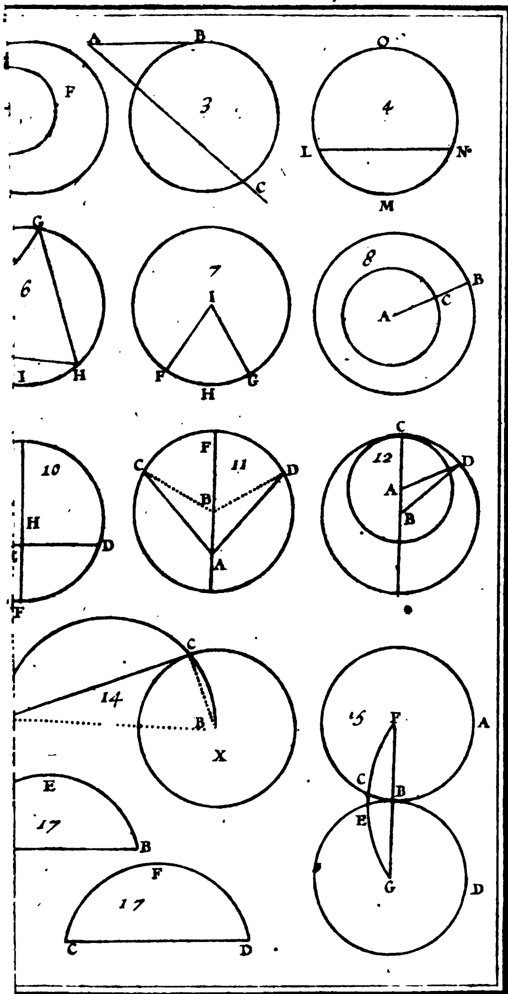
47. du 1.) Donc le rectangle de AH, AF, & le quarré de EB sont ensemble égaux aux deux quarrez de AB & de EB. Si donc de ces deux touts qui sont égaux, on ôte le quarré de EB qui leur est commun, il restera le rectangle de AH, AF, égal au quarré de AB. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

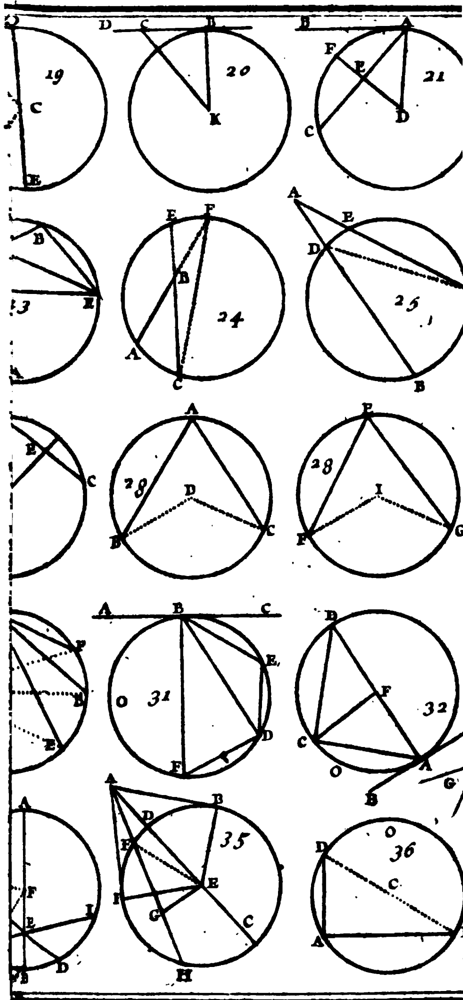
Il s'ensuit de cette Proposition, que si d'un point pris à discretion hors d'un Cercle, on mene tant de lignes droites que l'on voudra, qui coupent le Cercle, & qui aillent se terminer à sa circonference concave, le rectangle compris d'une de ses coupantes telle que l'on voudra, & de sa partie hors du Cercle, sera égal au rectangle compris de telle autre coupante que l'on voudra, & de sa partie hors du Cercle; car chacun de ces rectangles est égal au quarré de la touchante, qui seroit menée de ce même point.

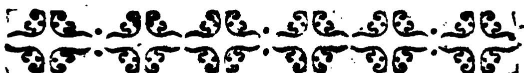
COROLLAIRE II.

Il s'ensuit encore que si d'un point pris à discretion hors d'un Cercle, on mene deux lignes droites qui le touchent, elles seront égales entr'elles; car le quarré de chacune de ces lignes est égal au rectangle d'une coupante, & de sa partie hors du Cercle; & ainsi chacun de ces quarrez est égal à l'autre. D'où il suit que les lignes qui en sont les côtez, sont égales.


A
B
C
F
3
4
O
L
N
M
G
6
I
H
7
F
G
8
A
C
B
10
H
D
F
11
C
D
B
A
12
C
D
A
B
14
B
X
15
F
A
C
B
E
G
D
E
17
B
F
17
C
D




19
20
21
23
24
25
28
31
32
35
36



LIVRE QUATRIE'ME.

DES ELEMENS

D'EUCLIDE.

Ce quatriéme Livre est fort utile dans la Trigonometrie ; puisqu'en inscrivant les polygones dans un Cercle, nous avons des pratiques pour faire la Table des soustendantes, des Sinus, des Tangentes, & des Secantes, laquelle est très-necessaire pour toute sorte de mesurages.

Secondement, en inscrivant des polygones dans un Cercle, nous avons les divers aspects des astres, qui prennent leurs noms des mêmes polygones.

Troisiémement, cette même pratique nous donne la quadrature du Cercle, autant juste qu'on en peut avoir besoin. Nous démontrons encore que les Cercles sont en raison doublée de leur diametre.

Quatriémement, l'Architecture militaire a besoin d'inscrire des polygones dans un Cercle, pour faire le dessein des Fortifications regulieres.

LES DEFINITIONS.

Pl. 1. Fig. 1. UNE figure rectiligne est inscrite dans un Cercle; ou le Cercle est décrit autour de la figure, lorsque tous ses angles sont en la circonference du même Cercle. *Comme le Triangle ABC est inscrit dans un Cercle, & le Cercle est décrit autour du Triangle; parce que les angles A, B, C, aboutissent à sa circonference. Le Triangle DEF n'est pas inscrit dans le Cercle, parce que l'angle D, n'aboutit pas à la circonference du Cercle.*

Pl. 1. Fig. 2. II. Une figure rectiligne est décrite autour d'un Cercle, & le Cercle est inscrit au dedans de cette figure, quand tous les côtez de la figure touchent la circonference du Cercle. *Comme le Triangle GHI, est décrit autour du Cercle KLM, à cause que ses côtez touchent la circonference du Cercle en K, L, M.*

III. Une ligne est ajoûtée, ou inscrite dans un Cercle, lorsque ses deux bouts touchent la circonference du Cercle: *Comme dans la figure précedente, la ligne NO. La ligne RP n'est pas inscrite dans le Cercle.*

PROPOSITION I.

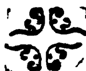
PROBLEME.

Inſcrire dans un Cercle une ligne donnée, qui ne ſoit pas plus grande que ſon diametre.

ON propoſe d'inſcrire dans un Cercle AEBD, une ligne qui ne ſurpaſſe pas ſon diametre. Prenez ſa longueur ſur le diametre, & que ce ſoit, par exemple BC. Mettez le pied du Compas au point B, & décrivez un Cercle à l'ouverture BC, qui coupe le Cercle AEBD en D & E. Tirez la ligne BD, ou BE. Il eſt évident qu'elles ſont égales à BC, par la définition du Cercle. Pl. 1. Fig. 3.

USAGE.

Cette Propoſition eſt neceſſaire pour la pratique de celles qui ſuivent.



PROPOSITION II.

PROBLEME.

Inscrire dans un Cercle un Triangle équiangle à un autre.

Pl. 1. Fig. 4. & 5. ON propose le Cercle EGH dans lequel on veut inscrire un Triangle équiangle au Triangle ABC. Tirez la touchante FED (par la 17. du 3.) & faites au point de l'attouchement E, l'angle DEH, égal à l'angle B; & l'angle FEG égal à l'angle C, (par la 23. du 1.) Tirez la ligne GH, le Triangle GEH sera équiangle à ABC.

Démonstration.

L'angle DEH est égal à EGH, du segment alterne (par la 32. du 3.) Or l'angle DEH a été fait égal à l'angle B; & par consequent les angles B & G sont égaux. Les angles C & H, sont aussi égaux, par la même raison; & (par le Corol. 2. de la 32. du 1.) les angles A & GEH seront égaux. Donc les Triangles EGH, ABC sont équiangles.

USAGE.

Cette Proposition sert pour inscrire dans

un Cercle, un Pentagone & un Pentedeca-gone, comme vous verrez dans les Propositions XI. & XVI.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

Décrire autour d'un Cercle, un Triangle équiangle à un autre.

SI on veut décrire autour du Cercle GKH, un Triangle équiangle à ABC, il faut continuer un des côtez BC, en D & en F, & faire l'angle GIH égal à l'angle ABD : HIK égal à l'angle ACF : puis tirer les Tangentes LGM, LKN, NHM, par les points G, K, H. Les Tangentes se rencontreront ; car les angles IKL, IGL étant droits, si on tiroit la ligne KG, qui n'est pas tirée, les angles KGL, GKL seroient plus petits que deux droits : donc (par l'onziéme axiome,) les lignes GL, KL doivent concourir. Pl. 14 Fig. 6. & 7.

Demonstration.

Tous les angles du quadrilatere GIHM, sont égaux à quatre droits, puisqu'il peut être partagé en deux Triangles : les angles IGM, IHM, que font les Tan-

gentes, sont droits; donc les angles M & I valent deux droits, aussi bien que les angles ABC, ABD. Or l'angle GIH, est égal à l'angle ABD : Donc l'angle M sera égal à l'angle ABC. Par la même raison, les angles N & ACB sont égaux : & ainsi les Triangles LMN, ABC sont équiangles.

PROPOSITION. IV.

PROBLEME.

Inscrire un Cercle dans un Triangle.

Pl. 1. Fig. 8. SI vous voulez inscrire un Cercle dans le Triangle ABC : divisez en deux également les angles ABC, ACB (par la 9. du 1.) tirant les lignes CD, BD, qui concourent au point D. Tirez ensuite du point D, les perpendiculaires DE, DF, DG, lesquelles seront égales, de sorte que le Cercle décrit du centre D, à l'ouverture DE, passera par F & G.

Démonstration.

Les Triangles DEB, DBF ont les angles DEB, DFB égaux, puisqu'ils sont droits : les angles DBE, DBF sont aussi égaux, l'angle ABC ayant été divisé en deux également : le côté DB est commun :

onc (par la 26. du 1.) ces Triangles
ront égaux en tout sens ; & les côtez
E, DF seront égaux. On peut démon-
er de la même façon, que les côtez DF,
G sont égaux. On peut donc décrire un
ercle qui passe par les points E, F, G : &
uisque les angles E, F, G sont droits, les
ôtez AB, AC, BC, touchent le Cercle,
ui sera par consequent inscrit dans le
riangle.

COROLLAIRE.

Il suit de la pratique de ce Problême, ue les trois lignes qui divisent en deux galement les angles d'un Triangle, se ren-ontrent au dedans du Triangle en un mê-ie point, parce que le centre du Cercle ins-rit est dans chacune. Il en est de même des ois lignes, qui divisent en deux également s côtez opposez, puisque le centre de gra-ité du Triangle est dans chacune, com-e on le démontre dans la Mécanique.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

Décrire un Cercle autour d'un Triangle.

SI vous voulez décrire un Cercle au-tour du Triangle ABC; divisez les Pl. 1 Fig. 9.

côtez AB, BC en deux également, en D & E, & sur ces points élevez des perpendiculaires DF, EF, qui concourent au point F. Si vous décrivez un Cercle du centre F, à l'ouverture FB, il passera par A & C; c'est-à-dire, que les lignes FA, FB, FC, sont égales.

Demonstration.

Les Triangles ADF, BDF, ont le côté DF commun & les côtez AD, DB égaux, puisque le côté AB a été divisé également; les angles en D sont égaux, étant droits. Donc (par la 4. du 1.) les bases AF, BF sont égales: comme aussi les bases BF, CF.

USAGE.

Nous avons souvent besoin d'inscrire un Triangle dans le Cercle; comme dans la premiere Proposition du troisiéme Livre de ma Trigonometrie. Cette pratique est aussi necessaire pour mesurer l'aire d'un Triangle, & en plusieurs autres rencontres.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

Inscrire un quarré dans un Cercle.

Pl. 1. Fig. 10. POur inscrire un quarré dans un Cercle ACBD; tirez au diametre AB, la

endiculaire DC, qui passe par le cen-
E. Tirez aussi de l'extrêmité d'un dia-
re à l'extrêmité de l'autre, les lignes
, CB, BD, AD : & vous aurez inscrit
le Cercle le quarré ACBD.

Demonstration.

es Triangles AEC, CEB ont les cô-
AE, EC égaux aux côtez EC, EB, &
ngles AEC, CEB égaux, puisqu'ils
droits. Donc les bases AC, CB sont
es (par la 4. du 1.) De plus, puis-
les côtez AE, CE sont égaux, les
les EAC, ECA seront égaux : & l'an-
E étant droit, ils seront chacun demi-
its, (par la 32. du 1.) Ainsi l'an-
ECB est la moitié d'un droit. Par
sequent, l'angle ACB sera droit. Il
est de même de tous les autres : Donc
igure ACBD est un quarré.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

Décrire un quarré autour d'un Cercle.

Yant tiré les deux diametres AB, Pl. 12
CD, qui se coupent perpendiculai- Fig. 115
ent au centre E : tirez les touchantes

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

Décrire un Cercle autour d'un quarré.

Pl. 1. Fig. 12. POur décrire un Cercle autour d'un quarré ABFD, tirez les diagonales AF, BD, qui se coupent au point E. Ce point E sera le centre du Cercle, qui passera par les points A, F, B, D. Je dois donc démontrer que les lignes AE, FE, BE, DE sont égales.

Demonstration.

Les côtez AB, FB sont égaux, & l'angle B est droit : donc les angles FAB, BFA sont égaux (par la 5. du 1.) & demi-droits, (par la 32. du 1.) Je démontre de la même façon, que les angles ABD, ADB, FDB, DBF, sont demi droits, ainsi le Triangle AEB, ayant les angles EAB, EBA demi-droits, & par consequent égaux, il aura aussi (par la 6. du 1.) les côtez AE, EB égaux. On démontre de même que les lignes EF, EB; EF, ED sont égales.

USAGE.

Nous montrons dans le douziéme Livre que

que les Polygones decrits dans le Cercle, degenerent en Cercle; & que comme ces Polygones sont toûjours en raison doublée de leurs diametres, les Cercles le sont aussi. Nous avons besoin dans la Geometrie pratique, d'inscrire le quarré, & les autres Polygones, dedans & autour d'un Cercle, pour reduire le Cercle au quarré.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

Décrire un Triangle Isoscele qui ait les angles sur la base, chacun double du troisiéme.

POur décrire le Triangle Isoscele ABD qui ait chacun des angles ABD, ADB, double de l'angle A; divisez la ligne AB, (par la 11. du 2.) de sorte que le quarré de AC soit égal au rectangle AB, BC. Décrivez du centre A, à l'ouverture AB, un Cercle BD, dans lequel vous inscrirez BD égale à AC. Tirez la ligne DC, & décrivez un cercle autour du Triangle ACD, (par la 5.) Pl. 12. Fig. 13.

Démonstration.

Puisque le quarré de CA, ou BD, est

O

égal au rectangle compris sous AB, BC; la ligne BD touchera le Cercle ACD, au point D, (par la 37. du 3.) Donc l'angle BDC sera égal à l'angle A, compris dans le segment alterne CAD, (par la 32. du 3.) Or l'angle BCD exterieur, eu égard au Triangle ACD, est égal aux angles A & CDA: donc l'angle ACD est égal à l'angle ADB. De plus l'angle ADB, est égal à l'angle ABD, (par la 5. du 1.) donc les angles DCB, DBC sont égaux, & (par la 6. du 1.) les côtez BD, DC seront égaux. Et puisque AC est égal à BD, les côtez AC, CD seront égaux, & les angles A & CDA le seront aussi. Donc l'angle ADB est double de l'angle A.

USAGE.

Ce Problême sert pour le suivant, c'est-à-dire, pour inscrire un Pentagone regulier dans un Cercle, ou l'on voit que pour y inscrire un Eptagone regulier, il faudroit y inscrire un Triangle Isoscele, où chacun des deux angles à la base, fut triple de l'angle au sommet: mais ce Problême étant solide, il ne peut pas être résolu par le Cercle & par la ligne droite seulement; & c'est à cause de cela qu'Euclide n'en a point parlé.

PROPOSIITON XI.

PROBLEME.

Inſcrire un Pentagone régulier dans un Cercle.

POur inſcrire un Pentagone régulier dans un Cercle, décrivez (par la 10.) un Triangle Iſoſcele ABC, qui ait les angles ABC, ACB ſur la baſe, chacun double de l'angle A. Inſcrivez (par la 2.) dans le Cercle, un Triangle DEF équiangle au Triangle ABC: diviſez en deux également les angles DEF, DFE tirant les lignes EG, FH. Enfin, tirez les lignes DH, DG, GF, EH: & vous aurez décrit un Pentagone régulier; c'eſt-à-dire, qui a tous les côtez égaux, auſſi bien que tous les angles. Pl. 1. Fig. 14. & 15.

Démonſtration.

Les angles DEG, GEF, DFH, HFE, ſont les moitiez des angles DEF, DFE, qui ſont chacun double de l'angle A: donc ils ſont tous égaux à l'angle A: & par conſequent les cinq arcs, qui leur ſervent de baſe, ſont égaux (par la 26. du 3.) & les lignes HD, HE, EF, FG, GD ſont éga-

les (par la 29. du 3.) Secondement, les angles DGF, GFE, ayant chacun pour base, trois de ces arcs égaux, seront aussi égaux. Donc les côtez, & les angles de ce Pentagone sont égaux.

SCOLIE.

On trouve dans la construction des Tables de Sinus de M. Ozanam, une autre methode plus facile pour inscrire un Pentagone regulier dans un Cercle, & aussi un Décagone regulier, de laquelle on tire la maniere de trouver en nombres les Sinus des arcs de 18. & de 36. degrez.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

Décrire un Pentagone régulier autour d'un Cercle.

Pl. 1. Fig. 16. INscrivez un Pentagone régulier ABCDE dans le Cercle (par la précedente) tirant des Tangentes par les points A, B, C, D, E, (par la 17. du 3.) vous aurez décrit un Pentagone regulier autour du Cercle. Tirez les lignes FA, FG, FE, FH, FD.

Démonstration.

Les lignes touchantes GA, GE sont

égales (par la 2. Corol. de la 36. du 3.) comme aussi EH, HD : les lignes FA, FE sont aussi égales (par la définition du Cercle.) Donc (par la 8. du 1.) les Triangles FGA, FGE sont égaux en tout sens, & les angles AFG, EFG sont égaux; comme aussi les angles EFH, DFH. Et parce que les angles EFA & EFD sont égaux (par la 27. du 3) leurs moitiez EFH, EFG seront égales: & (par la 26. du 1.) les Triangles EFH, EFG seront égaux en tout sens, & les côtez EG, EH aussi égaux. Je démontre de la même façon, que tous les côtez sont divisés en deux également : & par consequent, puisque les lignes AG, GE sont égales, leurs doubles GH, GI seront aussi égales. De plus, les angles G & H, étant doubles des angles FGE, FHD, sont aussi égaux. Nous avons donc décrit un Pentagone regulier autour d'un Cercle.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

Inscrire un Cercle dans un Pentagone régulier.

POur inscrire un Cercle dans le Pentagone régulier ABCDE : divisez les Pl. I. Fig. 17.

angles A & B en deux également par les lignes AF, BF, lesquelles concourreront en F. Puis tirant la ligne FG perpendiculaire à AB, décrivez un Cercle du centre F, à l'ouverture FG. Je dis qu'il touchera tous les autres côtez, c'est-à-dire, qu'ayant tiré FH perpendiculaire à BC; FG & FH seront égales. Tirez la ligne FC.

Demonstration.

Puisque les angles égaux A & B ont été divisez en deux également, leurs moitiez GAF, GBF seront égales: & puisque les angles en G sont droits, & le côté FG commun, les Triangles AFG, BFG seront égaux en tout sens (par la 26. du 1.) ainsi les lignes AG, GB sont égales. De plus, je prouve que les lignes BG, BH, aussi-bien que FG, FH sont égales: Et les côtez AB, BC d'un Pentagone regulier étant égaux, les lignes BH, HC seront égales. Par consequent les angles G & H étant droits & égaux, les Triangles BFH, HFC seront égaux en tout sens: & les angles FBH, FCH seront égaux (par la 4. du 1.) Et puisque les angles B & C sont égaux, l'angle FCH sera la moitié de l'angle BCD. Ainsi allant à l'un & à l'autre, je démontrerai que toutes les perpendiculaires, FG, FH, & les autres sont égales.

PROPOSITION XIV.

PROBLÊME.

Décrire un Cercle autour d'un Pentagone regulier.

POur décrire un Cercle autour d'un Pentagone regulier ABCDE, divisez deux de ses côtez AB, BC également en G & H; tirez les perpendiculaires GF, HF. Le Cercle décrit du centre F, à l'ouverture FA, passera par B, C, D, E. Pl. 1. Fig. 17.

Démonstration.

Supposons que le Cercle est décrit, il est évident (par la 1. du 3.) qu'ayant divisé la ligne AB par le milieu en G; & ayant tiré la perpendiculaire GF, le centre de ce Cercle est dans cette perpendiculaire: il est aussi dans HF, donc il est au point F.

USAGE.

Ces Propositions sont utiles pour faire la Table des Sinus, & pour tracer des Citadelles: car les Pentagones sont les plus ordinaires. Il faut aussi remarquer, que ces manieres de décrire un Pentagone autour d'un Cercle, se peuvent appliquer aux autres Polygones.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

Décrire un Hexagone regulier dans un Cercle.

Pl. 1. Fig. 18. POur inscrire un Hexagone regulier dans le Cercle ABCDEF : Tirez le diametre AD, & mettez le pied du Compas au point D, décrivez un Cercle à l'ouverture du demi-diametre DG qui coupera le Cercle en C & en E : puis tirez les diametres EGB, CGF, & les lignes AB, AF & les autres.

Demonstration.

Il est évident que les Triangles CDG, DGE sont équilateres ; car leurs côtez GC, DG, GE sont égaux étant tirez du centre à la circonference, & CD, DE ont été faits égaux à DG; c'est pourquoi les angles CGD, DGE, & leurs opposez au sommet BGA, AGF, sont chacun la troisiéme partie de deux droits ; c'est-à-dire, de 60. degrez. Or tous les angles qui se peuvent faire autour d'un point, valent quatre droits ; c'est-à-dire, 360. degrez. Ainsi ôtant quatrefois 60. c'est-à-dire, 240.

240. de 360. resteront 120. pour BGC & FGE, qui seront chacun de 60. degrez, parce qu'ils sont égaux, (par la 15. du 1.) Ainsi tous les angles du centre étant égaux, tous les arcs & tous les côtez seront égaux ; & chaque angle A, B, C, &c. sera composé de deux angles de soixante degrez, c'est-à-dire de cent vingt degrez. Ils seront donc égaux.

Coroll. Le côté de l'Hexagone est égal au demi-diametre.

USAGE.

Parce que le côté de l'Hexagone de la base est soûtendante ou corde d'un arc de 60 degrez, & qu'il est égal au demi-diametre ; sa moitié est de Sinus de 30. degrez : & c'est par ce Sinus que nous commençons la Table de Sinus. Euclide traite de l'Hexagone dans les derniers Livres de ses Elemens.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

Inscrire un Pentedecagone régulier dans un Cercle.

INscrivez dans un Cercle un Triangle équilateral ABC (par la 2.) & un Pentagone regulier (par la 11.) de sorte qu'un des angles du Triangle & du Pentagone Pl. 1. Fig. 19.

se rencontrent au point A, la ligne BF sera le côté du Pentedecagone, & l'arc EB étant divisé en 2. (par la 9. du 1.) au point I, les lignes BI, IE seront aussi deux côtez du Pentedecagone : Si on inscrit dans les autres arcs des lignes égales à BF, le Pentedecagone sera achevé.

Démonstration.

Puisque la ligne AB est le côté du Triangle équilateral, l'arc AEB, sera de 120. degrez, qui est le tiers de tout le Cercle; & par consequent il contiendra 5 quinziémes: mais l'arc AE qui est l'arc du Pentagone, étant de 72 degrez qui sont la cinquiéme partie du Cercle, contiendra trois quinziémes. Donc l'arc EB en contient deux, c'est-à-dire 48 degrez, & par consequent l'arc BF sera un quinziéme ou la moitié de l'arc EB, c'est-à-dire de 24. degrez pour chaque arc du Pentedecagone.

USAGE.

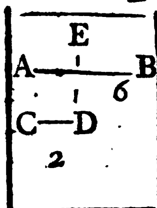
Cette Proposition sert pour ouvrir le chemin aux autres Polygones. Nous avons dans le compas de proportion, quelques méthodes très-faciles pour inscrire tous les Polygones ordinaires : mais elles sont fondées sur celles-ci. Car on ne pourroit pas marquer sur cet instrument les Polygones, si on ne trouvoit leurs côtez par cette proposition, ou par d'autres semblables.

LIVRE CINQUIE'ME. DES ELEMENS D'EUCLIDE.

CE cinquiéme Livre est absolument nécessaire, pour démontrer les Propositions du sixiéme Livre. Il contient une doctrine très-universelle, & une façon d'argumenter par proportion, qui est très-subtile, très-solide, & très-courte. Ainsi tous les traitez qui sont fondez sur les proportions ne peuvent se passer de cette Logique Mathematique. La Géometrie, l'Arithmetique, la Musique, l'Astronomie, la Statique, & pour dire en un mot, tous les traitez de Mathematique se démontrent par les Propositions de ce Livre. La plupart des mesurages se font par proportion dans la Géometrie pratique. On peut démontrer toutes les regles d'Arithmetique par les Theoremes de ce Livre; de sorte qu'il n'est pas nécessaire de recourir au septiéme, ni au huitiéme, & neuviéme pour cela. La Musique des Anciens n'est presque autre chose que la doctrine des proportions appli-

quees aux sons. Il en est de meme de la Statique, qui considere les proportions des poids. Enfin on peut assurer que si on ôtoit aux Mathematiques la connoissance des proportions, que ce Livre nous donne, le reste seroit peu considerable.

DEFINITIONS.



Une petite quantité comparée avec une plus grande, s'appelle partie. *Comme si on compare la ligne CD, de deux pieds, avec la ligne AB de 6; elle s'appellera partie. Et quoiqu'en effet CD ne soit pas dans AB; pourvû que la ligne AE égale à CD se trouve dans AB, on lui donne ce nom de partie.*

Le tout répond à la partie: & ce sera la plus grande quantité, comparée avec la plus petite; soit qu'elle la contienne en effet, ou qu'elle ne la contienne pas.

On divise ordinairement la partie prise en géneral, en partie aliquote, & partie aliquante.

1. La partie aliquote (qu'Euclide définit dans ce Livre) est une grandeur d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand elle est mesurée exactement par la plus petite. *C'est-à-dire, que c'est une petite quantité, comparée avec*

une plus grande, qu'elle mesure précisément. Comme la ligne de deux pieds prise trois fois, est égale à une ligne de 6. pieds.

2. La partie aliquante est une petite quantité, comparée avec une plus grande, qu'elle ne mesure pas exactement. *Ainsi une ligne de 4. pieds, est partie aliquante d'une ligne de 10. pieds.*

3. La multiple est une grandeur, d'une grandeur, la plus grande de la plus petite, quand la plus petite mesure exactement la plus grande : *c'est-à-dire que la multiple est une grande quantité, comparée avec une plus petite, qu'elle contient précisément un nombre de fois. Par exemple, la ligne de 6. pieds, est multiple de la ligne de 2. pieds, parce qu'elle la contient précisément 3. fois.*

5. Les Equimultiples sont des grandeurs qui contiennent également leurs parties aliquotes ; *c'est-à-dire, autant de fois. Par exemple, si A contient autant de fois B, que C contient D ; A & C seront Equimultiples de B & de D.*

12.	4.	6.	2.
A,	B,	C,	D,

5. Raison, est un rapport d'une grandeur à une autre de même genre selon la quantité. J'ai ajoûté, de même genre ; car Euclide ajoûte, que

Les quantitez ont une raison, lorsqu'é-

tant multipliées, elles se peuvent surpasser l'une l'autre. *Pour cela, il faut qu'elles soient de même genre. En effet une ligne n'a aucune raison avec une surface, parce qu'une ligne prise mathematiquement est considerée sans aucune largeur : ainsi étant multipliée tant qu'il vous plaira, elle ne donne aucune largeur, & néanmoins la surface en contient une.*

Puisque la raison est un rapport, c'est-à-dire une relation fondée sur la quantité : elle doit avoir deux termes. Celui que les Philosophes appelleroient fondement, est nommé par les Mathematiciens Antecedent : & le second terme est appellé Consequent. Comme, si nous comparons la quantité A, à la quantité B, ce rapport ou cette raison, aura pour antecedent la quantité A, & pour consequent la quantité B. Comme au contraire, si nous comparons B, avec A, cette raison de B à A, aura pour antecedent la quantité B, & pour consequent la quantité A.

On divise la raison, ou rapport d'une quantité à une autre, en raison rationnelle, & raison irrationnelle. La raison rationnelle, est un rapport d'une quantité à une autre qui lui est commensurable; c'est-à-dire une relation de deux quantitez qui ont une mesure commune qui les mesure

exactement toutes deux. Comme, la raiſon d'une ligne de 4. pieds, à une de 6. eſt rationnelle; parce qu'une ligne de deux pieds les meſure exactement toutes deux: & lorſque cela arrive, ces quantitez ont même raiſon qu'un nombre à un autre. Par exemple, parce que la ligne de deux pieds qui eſt la meſure commune, ſe trouve deux fois dans la ligne de 4. & trois fois dans celle de 6. la premiere à la ſeconde aura même raiſon que 2. à 3.

La raiſon irrationnelle eſt entre deux quantitez de même genre qui ſont incommenſurables. Comme, la raiſon du côté d'un quarré à ſa diagonale. Car on ne peut trouver aucune meſure, ſi petite qu'elle ſoit, qui les meſure toutes deux préciſément: & pour lors ces lignes n'ont pas même raiſon qu'un nombre à un autre nombre.

Quatre quantitez ſeront en même raiſon, ou ſeront proportionnelles, quand la raiſon de la premiere à la ſeconde, ſera la même, ou ſemblable à celle de la troiſiéme à la quatriéme; de ſorte qu'à parler proprement, la proportion eſt une ſimilitude de raiſons. Mais on a de la peine à entendre en quoi conſiſte cette ſimilitude de raiſons: c'eſt-à-dire, que deux rapports, ou relations ſoient ſemblables. Car Euclide n'en a pas donné une définition juſte, &

qui en expliquât la nature, s'étant contenté de nous donner une marque par laquelle nous puissions connoître, si les quantitez avoient une même raison; & c'est l'obscurité de cette définition qui a rendu ce Livre difficile. Je tâcherai de suppléer à ce défaut.

6. Euclide dit, que quatre grandeurs ont même raison, lorsqu'ayant pris les Equimultiples de la premiere, & de la troisiéme; & d'autres Equimultiples de la seconde, & de la quatriéme; quelque combinaison qu'on fasse, quand le multiple de la premiere, étant plus grand, que le multiple de la seconde; le multiple de la troisiéme est aussi plus grand, que le multiple de la quatriéme: & quand le multiple de la premiere est égal, ou plus petit que le multiple de la seconde, & que celui de la troisiéme est aussi égal ou plus petit que celui de la quatriéme, alors il y a même raison de la premiere à la seconde, que de la troisiéme à la quatriéme.

A,	B,	C,	D,
2.	4.	3.	6.
E,	F,	G,	H,
10.	8	15	12
K,	L,	M,	N,
8.	8.	12.	12.
O,	P,	Q,	R,
6.	16.	9.	24.

Comme si on propose quatre grandeurs A, B, C, D, Ayant pris les Equimultiples de A & C, qui soient E & G, quintuples, F & H, doubles de B & D. Pareillement prenant K & M, quadruples de A & C: L & N, doubles de B & D,

Prenant encore O & Q triples de A & C: P & R quadruples de B & D. Parce que E étant plus grand que F; G est plus grand que H: & K étant égal à L; M est égal à N: Enfin O étant plus petit que P; Q est plus petit que R. Alors A aura la même raison à B, que C à D.

Pour bien expliquer ce que c'est que Proportion, c'est-à-dire que quatre grandeurs soient en même raison: quoiqu'on puisse dire en general, que pour cela il faut que la premiere soit une semblable partie, ou un semblable tout, eu égard à la seconde; que la troisiéme, comparée à la quatrieme: néanmoins parce que cette définition ne convient pas à la raison d'egalité, il en faut donner une plus generale; & pour la rendre intelligible, il faut expliquer ce que c'est qu'une semblable partie aliquote.

Les semblables parties aliquotes sont celles qui sont autant de fois dans leur tout: comme trois, eu égard à neuf; deux, eu égard à six, sont des parties aliquotes semblables, parce que chacune se trouve trois fois dans son tout.

La premiere quantité aura même raison à la seconde, que la troisiéme à la quatriéme, si la premiere contient autant de fois quelques parties aliquotes que ce soit de la seconde, que la troisiéme contient de sem-

blables parties aliquotes de la quatriéme; comme, si A contient autant de fois une

A, B, C, D.

centiéme, une milliéme, une cent milliéme partie de B : que C contient une centiéme, une milliéme, ou une cent milliéme partie de D ; & ainsi de toutes les autres parties aliquotes qu'on se peut imaginer ; il y aura même raison de A, à B, que de C à D.

7. Il y aura plus grande raison de la premiere quantité à la seconde, que de la troisiéme à la quatriéme : si la premiere contient plus de fois quelque partie aliquote de la seconde, que la troisiéme ne contient une semblable partie aliquote de la quatriéme. *Comme, 101. a plus grande raison a 10 : que 200. à 20. ; parce que 101. contient cent & une fois la dixiéme partie de 10. & 200. contient seulement cent fois la dixiéme partie de 20. qui est 2.*

8. Les grandeurs ou quantitez qui sont en même raison, s'appellent proportionelles.

9. La proportion ou analogie, est une similitude de raison ou de rapport.

10. La proportion doit avoir pour le moins trois termes. *Car afin qu'il y ait similitude de raison, il faut qu'il y ait deux raisons : Or chaque raison ayant*

deux termes, l'antecedent & le consequent, il semble qu'il y en devroit avoir quatre; comme, quand nous disons, qu'il y a même raison de A à B, que de C à D: mais le consequent de la premiere raison, pouvant être antecedent dans la seconde, trois termes peuvent suffire; comme, quand je dis, qu'il y a même raison de A à B, que de B à C.

11. Les grandeurs sont continuellement proportionnelles, quand les termes d'entre-deux se prennent deux fois; c'est-à-dire, comme antecedent, & comme consequent. *Comme s'il y a même raison de A a B, que de B à C, & de C à D.*

12. Pour lors, A à C aura la raison doublée de A à B: & la raison de A à D, sera triplée de celle de A à B.

Il faut remarquer qu'il y a bien de la difference entre raison double, & raison doublée. Nous disons que la raison de quatre à deux est double, c'est-à-dire que quatre est double de deux, de sorte que le nombre deux est celui qui donne le nom à cette raison, ou plutôt à l'antecedent de cette raison. Ainsi nous disons double, triple, quadruple, quintuple, qui sont des dénominations tirées de ces nombres deux, trois, quatre, cinq, comparés avec l'unité: car nous concevons mieux une raison, quand

ces termes sont plus petits. Mais comme j'ai remarqué, ces dénominations tombent plutôt sur l'antecedent, que sur la raison même; nous appellons donc la raison double, triple, quand l'antecedent est double, ou triple du consequent: mais quand nous disons que la raison est doublée, nous entendons que c'est une raison composée de deux raisons semblables; comme s'il y a même raison de 2. à 4. que de 4. à 8. la raison de 2. à 8. étant composée, de la raison de 2. à 4. & de celle de 4. à 8. qui sont semblables, & comme egales; la raison de 2. à 8. sera doublee de chacune. Pareillement *3. à 27. est une raison doublée de celle de 3. à 9.* La *raison de 2. à 4. s'appelle sous-double, c'est-a-dire que 2. est la moitié de 4. mais la raison de 2. à 8. est doublée de la sous double; c'est-a-dire, que 2. est la moitié de la moitié de 8. comme 3. est le tiers du tiers de 27. où vous voyez qu'on prend deux fois les dénominateurs* $\frac{1}{3}$ *&* $\frac{1}{2}$. Pareillement *8. à 2. est une raison doublée de 8. a 4. parce que 8. est double de 4. mais 8. est le double du double de 2. S'il y a quatre termes en même raison continuée, celle du premier au dernier est triplée de celle du premier au second; comme si on met ces quatre nombre 2. 4. 8. 16. la raison de 2. à 16. est triplée de celle de 2. à 4. car*

2. *est la moitie de la moitie de la moitié de 16. Comme la raison de 16. à 2. est triplée de celle de 16. à 8. car 16. étant le double de 8. il est le double du double, du double de 2;*

13. Les grandeurs sont homologues; les antecedens aux antecedens, les consequens aux consequens. *Comme s'il y a même raison de A a B, que de C à D: A & C sont homologues.*

Les définitions suivantes sont les façons d'argumenter par proportion: & c'est principalement pour les demontrer que ce Livre est composé.

14. La raison alterne, ou par échange, est quand nous comparons les antecedens l'un avec l'autre; comme aussi les consequens. *Par exemple, si de ce qu'il y a même raison de A a B, que de C a D; je conclus qu'il y a même raison de A à C, que de B a D; cette façon ne peut avoir lieu que quand les quatre termes sont de même genre; c'est-à-dire, ou tous quatre des lignes, ou des surfaces, ou des solides. Voyez la proposition 16.*

15. La raison converse, est une comparaison des consequens aux antecedens. *Comme si de ce qu'il y a même raison de A à B, que de C à D; je conclus qu'il y a même raison de B à A, que de D à C.*

Voyez le Corol. de la Proposition 16.

16. La composition de raison, est une comparaison de l'antecedent & du consequent pris ensemble, au seul consequent. *Comme s'il y a même raison de A à B, que de C à D; je conclus qu'il y a aussi même raison de A & B, à B; que de C & D, à D. Proposition* 18.

17. La division de raison, est une comparaison de l'excès de l'antecedent par dessus le consequent, au même consequent: *Comme s'il y a même raison de A & B à B, que de C & D à D; je conclus qu'il y a même raison de A à B, que de C à D. Prop.* 17.

18. La conversion de raison, est la comparaison de l'antecedent, à la difference des termes. *Comme s'il y a même raison de A & B à B, que de C & D à D; je conclus qu'il y a même raison de A & B à A, que de C & D à C. Prop.* 18.

19. La Proportion d'égalité, est une comparaison des quantitez extrêmes, en laissant celles du milieu.

A.	B	C.	D.
E.	F.	G.	H.

Comme si y ayant même raison de A à B, que de E à F; & de B à C, que de F à G; & de C à D, que de G à H, je tire cette consequence; donc il y a même raison de A à D, que de E à H.

20. La Proportion d'égalité bien rangée, est celle dans laquelle on compare les termes avec le même ordre, *comme dans l'exemple précedent. Proposition 22.*

21. La proportion d'égalité mal rangée, est celle dans laquelle on compare les termes avec un ordre different. *Comme s'il y a même raison de A à B, que de G à H; & de B à C, que de F à G, & de C à D, que de E à F; je tire cette conclusion: Donc il y a même raison de A à D, que de E à H. Proposition 23.*

Voici toutes les façons d'argumenter par proportion.

1. S'il y a même raison de A à B, que de C à D; donc par la raison alterne, il y aura même raison de A à C, que de B à D.

2. Et par la raison converse, il y aura même raison de B à A, que de D à C.

3. Et par composition, il y a même raison de A & B à B, que de C & D à D.

4. Par la division de raison, s'il y a même raison de A & B à B, que de C & D à D; il y aura même raison de A à B, que de C à D.

5. Et par conversion, il y aura même raison de A & B à A, que de C & D à C.

6. Par la raison d'égalité rangée, s'il y a même raison de A à B, que de C à D; & aussi même raison de B à E, que de D

à F, il y aura même raison de A à E, qu[e] de C à F.

7. Par la raison d'égalité mal rangée, s'il y a même raison de A à B, que de D à F, & aussi même raison de B à E, que de C à D; il y aura même raison de A à E, que de C à F.

Ce Livre contient vingt-cinq Propositions d'Euclide, ausquelles on en a ajouté neuf, qui sont reçûes. Les six premieres de ce Livre ne sont utiles que pour prouver les suivantes par la méthode des équimultiples: & comme je ne me servirai pas de cette méthode, je commencerai par la septiéme, sans changer l'ordre ni le nombre des Propositions.

Les Demandes ou Suppositions.

Trois quantitez A, B, C, étant proposées, on veut qu'on accorde qu'il y a une quatriéme quantité possible, à laquelle la quantité C ait même raison que la quantité A à B.



PRO-

PROPOSITION VII.

THEOREME.

Les quantitez égales, ont même raiſon à une troiſiéme quantité : & une quantité a même raiſon à des quantitez égales.

A, 8.
C, 4.
B, 8.

SI les quantitez A & B ſont égales, elles auront même raiſon à une troiſiéme quantité C.

Démonſtration.

Si l'une des deux, par exemple A, avoit plus grande raiſon à la quantité C, que B, A contiendroit plus de fois une certaine partie aliquote de C, que B ne la contiendroit ; donc A ſeroit plus grande que B : contre ce que nous avons ſuppoſé.

Secondement, je dis que ſi A & B ſont égales, la quantité C aura même raiſon à la quantité A qu'à la quantité B.

Démonſtration.

Si la quantité C avoit plus grande raiſon à la quantité A, qu'à la quantité B, elle devroit contenir plus de fois une partie aliquote de la quantité A, qu'elle ne con-

tient une semblable partie aliquote de la quantité B. Ainsi cette partie de A, devroit être plus petite qu'une semblable partie aliquote de B. Donc A seroit plus petit que B; ce qui est contre la supposition.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

La plus grande de deux quantités, a plus grande raison à une troisiéme, que la plus petite: & cette troisiéme quantité a plus grande raison à la plus petite qu'à la plus grande.

Pl. 1. Fig. 20. La Figure de cette Proposition est sur la Planche du Livre quatriéme.

JE suppose que l'on compare les quantités AB & C, avec la même EF; & que AB surpasse C. Je dis qu'il y a plus grande raison de AB à EF, que de C à EF. Qu'on coupe AD égale à C, & qu'on divise EF par le milieu, & la moitié encore par le milieu, & ainsi continuellement jusques à ce qu'on rencontre GF, partie aliquote de EF qui soit plus petite que DB.

Démonstration.

AD, & C sont égales; donc il y a mê-

me raiſon de AD à EF, que de C à EF (par la 7.) & (par la définition 4.) AD, contiendra autant de fois GF partie aliquote de EF, que C la contient. Or AB la contient encore une fois pour le moins, puiſque DB eſt plus grande que GF; donc (par la 7. défin.) la raiſon de AB à EF, eſt plus grande que celle de C à la même EF.

Je dis en ſecond lieu, que EF a plus grande raiſon à C, qu'à la quantité AB. Qu'on prenne quelque partie aliquote de C, par exemple le quart, autant qu'il peut ſe rencontrer dans EF : ſuppoſons qu'il s'y rencontre cinq fois, ou il laiſſera quelque choſe de la quantité EF, après avoir été pris cinq fois, ou il ne laiſſera rien, c'eſt-à-dire qu'il meſure exactement EF; s'il ne reſte rien, il eſt évident que cinq quarts de la quantité AB, feront une plus grande ligne, que le quart de C pris cinq fois; ainſi ils ne pourront pas ſe rencontrer cinq fois dans EF. Que ſi le quart de C pris cinq fois, demeure en arriere, comme en G; ou le quart de AB pris cinq fois, ira juſques en F, ou il ira juſques en I. S'il va juſques en F, il y aura même raiſon de EF à AB, que de EG à C; par le point précedent, EF à C a plus grande raiſon que de EG à C, Donc EF a plus grande rai-

son à C, qu'à AB. Que si le quart de AB pris cinq fois, va jusques en I; il y aura même raison de EI à AB, que de EG, à C. Or EI ou EF à C a plus grande raison que EG à C. Donc EF à C a plus grande raison, que la même EF à AB.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

Les quantités sont égales, lorsqu'elles ont même raison à une troisiéme quantité.

A,	B,	C,
11.	11.	6.

SI les quantités A, & B ont même raison à une troisiéme quantité C: Je dis que A & B sont égales.

Demonstration.

Si l'une des deux, par exemple A étoit plus grande que B; elle auroit plus grande raison à la quantité C (par la 1. partie de la 8.) ce qui seroit contre la supposition.

Secondement, si la quantité C a même raison à la quantité A qu'à la quantité B; je dis que A & B sont égales. Car si A étoit plus grande que B, C auroit plus grande raison à la quantité B, qu'à la quan-

tité A (par la 2. partie de la 8.) ce qui seroit aussi contraire à notre supposition.

PROPOSITION X.

THEOREME.

La quantité qui a plus grande raison à la même, est la plus grande : & celle-là est la plus petite, à laquelle la même a une plus grande raison.

| A, B, C, | S'Il y a plus grande raison de A à C que de B à C, Je dis que A est plus grande que B. Car si A & B étoient égales, elles auroient même raison à C (par la 7.) si A étoit plus petite que B, il y auroit plus grande raison de B à C, que de A à C (par la 8.) L'un & l'autre est contraire à la supposition.

Secondement, s'il y a plus grande raison de C à B, que de C à A: Je dis que B sera plus petite que A. Car si A & B étoient égales, C auroit même raison à toutes deux, (par la 7.) Si B étoit plus grande que A, C auroit plus grande raison à A qu'à B, (par la 8.) L'un & l'autre est contre ce que nous avons supposé.

PROPOSITION XL.

THEOREME.

Les raisons qui sont égales à une troisiéme, le sont aussi entre elles.

A,	B,	C,	D,	E,	F,
4.	2.	8.	4.	6.	3.

S'Il y a même raison de A à B, que de C à D, & s'il y a aussi même raison de C à D, que de E à F: Je dis qu'il y aura même raison de A à B, que de E à F.

Démonstration.

Puisqu'il y a même raison de A à B que de C à D; A contient autant de fois quelque partie aliquote que ce soit de B, que C contient une semblable partie aliquote de D, (par la défin. 5.) & pareillement, autant de fois que C contient cette partie aliquote de D, E contiendra une semblable partie aliquote de F. Ainsi autant de fois que A contient quelque partie que ce soit de B, E contiendra aussi autant de fois une semblable partie aliquote de F. Donc il y aura même raison de A à B, que de E à F.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

Si plusieurs quantités sont proportionnelles, il y aura même raison d'un antecedent, à son consequent, que de tous les antecedens pris ensemble, à tous les consequens.

A	B.
3	12
C	D.
2	8.

S'Il y a même raison de A à B, que de C à D. Je dis qu'il y a même raison de A & C, pris ensemble à B & D, que de A à B.

Démonstration

Puisqu'il y a même raison de A à B que de C à D ; la quantité A contiendra autant de fois quelque partie aliquote que ce soit de B que C contient une semblable partie aliquote de D ; par exemple, le quart (par la défin. 5.) Or le quart de B, & le quart de D, font le quart de B & D. Ainsi A & C pris ensemble contiendra autant de fois le quart de B & D aussi pris ensemble que A contient le quart de B : & ce que je dis du quart, se vérifie de toutes les autres parties aliquotes.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

Si de deux raisons égales, l'une est plus grande qu'une troisieme, l'autre le sera aussi.

A, B : C, D : E, F :

S'Il y a même raison de A à B, que de C à D, & qu'il y ait plus grande raison de A à B, que de E à F : Je dis qu'il y aura aussi plus grande raison de C à D, que de E à F.

Démonstration.

Puisqu'il y a plus grande raison de A à B, que de E à F ; A contiendra quelque partie aliquote de B, plus de fois, que E ne contient une semblable partie aliquote de F (par la 6. défin.) Or C. contient une sembloble partie de D, autant de fois que A contient celle de B ; puisqu'il y a même raison de A à B, que de C à D. Ainsi C contient une partie aliquote de D, plus de fois que E, ne contient une semblable partie aliquote de F. Donc il y a plus grande raison de C à D, que de E à F.

PROPO-

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

S'il y a même raison de la premiere quantite, a la seconde; que de la troisiéme, à la quatrieme: & que la premiere soit plus grande, egale, ou plus petite que la troisieme; la seconde sera aussi plus grande, egale, ou plus petite que la quatrieme.

A, B,	C, D.

S'Il y a même raison de A à B, que de C à D: Je dis en premier lieu, que si A est plus grande que C; B sera aussi plus grande que D.

Demonstration.

Puisque A est plus grande que C: Il y aura (par la 8.) plus grande raison de A à B, que de C à B: Or comme A est à B. Ainsi C est à D. Donc il y aura plus grande raison de C à D, que de C à B. & par consequent (suivant la 10.) B sera aussi plus grande que D.

Je dis en second lieu, que si A est égale à C; B sera aussi égale à D.

Demonstration.

Puisque A & C sont égales, il y aura même raison de A à B, que de C à B (par

la 7.) Or comme A eſt à B, ainſi C eſt à D. Donc il y a même raiſon de C à B, que de C à D; & par conſequent B & D ſont égales (par la 9.)

J'ajoûte en troiſiéme lieu, que ſi A eſt plus petite que C, B ſera auſſi plus petite que D.

Démonſtration.

Puiſque A eſt plus petite que C; il y aura moindre raiſon de A à B, que de C à B, (par la 8.) or comme A eſt à B, ainſi C eſt à D. Donc il y aura moindre raiſon de C à D, que de C à B; & par conſequent (ſuivant la 10.) B ſera plus petite que D.

PROPOSIITON XV.

THEOREME.

Les équimultiples, & les ſemblables parties aliquotes, ſont en même raiſon.

A,	B,	C,	D.
2.	3.	6.	9.
E.	2.	H.	3.
F,	2.	I,	3.
G,	2.	K,	3.

SI les quantités C & D ſont équimultiples de A & B leurs parties aliquotes; il y aura même raiſon de A à B, que de C à D. Qu'on diviſe la quantité C en parties égales à A, qui ſeront E,

F, G : qu'on divise aussi la quantité D en parties égales à B qui seront H, I, K. Puisque C & D sont équimultiples de A & B : il y aura autant de parties dans l'une que dans l'autre.

Démonstration.

Il y a même raison de E à H, de F à I, de G à K, que de A à B ; puisqu'elles sont égales. Donc (par la 12.) il y aura même raison de E, F, G, à H, I, K ; c'est-à-dire de C à D, que de A à B.

Coroll. Les mêmes nombres de parties aliquotes de deux quantités, sont en même raison que ces quantités. Car puisqu'il y a même raison de E à H, que de C à D, & de F à I ; il y aura aussi même raison de E & F, à H & I, que de C à D.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

La Raison Alterne.

Si quatre grandeurs de même espece sont proportionnelles, elles seront aussi proportionnelles alternativement.

A,	B;	C,	D.
18.	8.	9.	4.

S'Il y a même raison de A à B, que de C à D : & si les quatre quantités

ſont de même eſpece, c'eſt-à-dire, ſi tou-tes quatre ſont des lignes, ou toutes quatre des ſurfaces; ou toutes quatre des ſolides: Il y aura même raiſon de A à C que de B à D. Car ſuppoſé qu'il y ait plus grande raiſon de A à C, que B à D.

Demonſtration.

Puiſqu'on veut qu'il y ait plus grande raiſon de A à C, que de B à D, la quantité A contiendra une partie aliquote de C: par exemple le tiers, plus de fois que B ne contient le tiers de D. Que A contienne le tiers de C quatre fois, & B le tiers de D ſeulement trois fois: ayant diviſé A en quatre parties, le tiers de C ſera une fois en chacune; & ayant auſſi diviſé B en quatre, le tiers de D ne ſera pas en chacune. Donc les trois quarts de A contiendront les trois tiers de C, c'eſt-à-dire la quantité C; & les trois quarts de B ne contiendront pas les trois tiers de D, c'eſt-à-dire la quantité D. D'ailleurs, puiſqu'il y a même raiſon de A à B, que de C à D; il y aura auſſi même raiſon des trois quarts de A aux trois quarts de B, que de C à D (par le Coroll. de la 15.) (Et par la 14.) ſi les trois quarts de A ſont plus grands que C; les trois quarts de B ſeront plus grands que D: quoique nous ayons demontré le contraire.

LEMME.

S'il y a même raison de la premiere quantité à la seconde, que de la troisiéme à la quatriéme ; une partie aliquote de la premiere aura même raison à la seconde, qu'une semblable partie de la troisiéme, à la quatriéme.

16.	3.	32.	6.
A,	B,	C,	D.
E,		F,	
4.		8.	

S'Il y a même raison de A à B, que de C à D ; & que E soit une partie aliquote de A, & F, une semblable partie aliquote de C : Je dis qu'il y a même raison de E à B, que de F à D.

Démonstration.

S'il y avoit plus grande raison de E à B, que de F à D : E contiendroit une partie aliquote de B plus de fois, que F ne contient une semblable partie aliquote de D. Donc E prise deux, trois & quatre fois, contiendroit une partie aliquote de B plus de fois, que F prise deux, trois & quatre fois ne contiendroit une partie aliquote de D. Or E pris quatre fois, est égal à A, comme F pris quatre fois est égal à C ; ainsi A contiendroit une partie aliquote de B, plus de fois que C ne con-

tient une ſemblable partie aliquote de D. Donc il y auroit plus grande raiſon de A à B, que de C à D ; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

COROLLAIRE.

Qui eſt dans Euclide après la quatriéme Propoſition.

La raiſon converſe.

S'il y a même raiſon, de la premiere grandeur à la ſeconde, que de la troiſiéme à la quatriéme : il y aura même raiſon de la ſeconde, à la premiere, que de la quatriéme, à la troiſiéme.

A,	B,	C,	D,
4.	8.	12.	24.
E,	F,		
1.	3.		

SI'l y a même raiſon de la quantité A à B, que de C à D : Il y aura auſſi même raiſon de B à A, que de D à C.

Démonſtration.

S'il y avoit plus grande raiſon de B à A, que de D à C ; B contiendroit une partie aliquote de A ; par exemple, le quart E, plus de fois, que D ne contient F le quart de C. Suppoſons que B contient huit fois la quantité E ; D ne contiendroit

que ſept fois la quantité F. Et puiſqu'il y a même raiſon de A à B, que de C à D, il y aura auſſi même raiſon de E à B, que de F à D (par le Lemme précedent.) Et (par la 15.) E priſe huit fois, aura même raiſon à B, que F priſe huit fois à D. Or E priſe huit fois eſt contenuë dans B; donc F priſe huit fois ſera contenuë dans D; quoique nous ayons démontré le contraire. Il n'y a donc pas plus grande raiſon de B à A, que de D à C.

Il ſemble que les Sectateurs d'Averroës ſe ſervoient de cette façon d'argumenter, pour prouver que le monde étoit de toute éternité, diſant qu'il y a même rapport de l'acte éternel de la volonté de Dieu à la production éternelle du monde; que de l'acte temporel à un effet temporel: donc par échange, il y a même raiſon d'un acte temporel de volonté, c'eſt-à-dire qui a commencé dans le tems, à un effet éternel; que d'une volonté éternelle à un effet temporel. Or il eſt évident que la volonté, ou l'acte de volonté, qui a commencé dans le temps, ne peut pas produire un effet éternel: Donc l'acte de Dieu éternel ne peut pas produire un effet dans le temps. Mais ce raiſonnement a deux défauts. Le premier eſt, qu'il ſuppoſe que Dieu ait quelque acte de volonté qui commence dans le temps: & le

second, qui fait échange des raisons ou proportions, quoique les termes soient de diverses especes.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

Division de raison.

Si les quantitez composées sont proportionnelles; elles le seront, etant divisées.

A, B, C, D
5. 3. 10. 6

S'Il y a même raison de A & B à B, que de C & D à D: il y aura aussi même raison de A à B, que de C à D.

Démonstration.

Puisqu'on suppose qu'il y a même raison de A & B à B, que de C & D à D: A & B contiendra une partie aliquote de B, autant de fois que C & D contient une semblable partie aliquote de D. Or cette partie aliquote se trouve autant de fois dans B, qu'une semblable se trouve dans D. Donc ôtant B de A & B, & D de C & D; A aura encore autant de parties aliquotes de B, que C en contient de semblables de D. Et par consequent il y aura même raison de A à B, que de C à D.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

Composition de raison.

Si les quantitez étant divisées, sont proportionnelles, elles le seront, étant composées.

A,	B,	C,	D,
5.	3.	10.	6.

S'Il y a même raison de A à B, que de C à D: il y aura aussi même raison de A & B à B, que de C & D à D.

Démonstration.

Puisqu'on suppose qu'il y a même raison de A à B, que de C à D, A contiendra quelque partie aliquote que ce soit de B autant de fois, que C contient une semblable partie aliquote de D. Or la quantité B contient quelque partie aliquote que ce soit des siennes, autant de fois, que D en contient une semblable des siennes. Donc ajoûtant B à A, & D à C, A & B contiendra quelque partie aliquote de B, autant de fois, que C & D contient une semblable partie aliquote de D. Il y a donc (par la 5. défin.) même raison de A & B à B, que de C & D à D.

COROLLAIRE.

Converſion de raiſon.

S'Il y a même raiſon de A & B à B, que de C & D à D, il y aura auſſi même raiſon de A & B à A, que de C & D à C. Car (par la précedente) il y aura même raiſon de A à B que de C à D : Et (par le Corol. de la 16.) il y aura même raiſon de B à A, que de D à C. Et en compoſant, il y aura même raiſon de A & B à A, que de C & D à C.

USAGE.

Nous nous ſervons fort ſouvent de cette façon d'argumenter dans preſque toutes les parties des Mathematiques.

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

Si les tous ſont en même raiſon, que les parties qui en ont été retranchées ; celles qui reſtent, ſeront en meme raiſon.

A,	C,
12.	6.
B,	D,
4.	2.

S'Il y a même raiſon de la quantité A & B, à la quantité C & D, que de la partie B à la partie D : Je démontre qu'il y aura même raiſon de A à C, que de A & B à C & D.

Démonstration.

On suppose qu'il y a même raison de A & B à C & D, que de B à D : Donc par échange (selon la 16.) il y aura même raison de A & B à B, que de C & D à D ; & par la conversion de raison, il y aura même raison de A & B à A, que de C & D à C : Et encore par échange, il y aura même raison de A & B à C & D, que de A à C.

USAGE.

On agit souvent suivant cette Proposition dans la regle de socieré. Car on ne fait pas la regle de trois pour chaque associé, & l'on se contente de donner au dernier le reste du gain, supposant que s'il y a méme raison de toute la somme des capitaux, à tout le gain ; que du capital d'un associé, à sa part du gain ; il y aura aussi méme raison du capital qui reste au restant du gain.

Les Propositions 20. & 21. ne sont pas nécessaires.



PROPOSITION XXII.

THEOREME.

La raiſon d'égalité avec ordre.

Si on propoſe quelques termes auſquels on en compare un pareil nombre ; de ſorte que ceux qui ſe répondent dans les mêmes rangs, ſoient proportionnels; les premiers & les derniers ſeront proportionnels.

12.	6.	2.	6.	3.	1.
A,	B,	C,	D,	E,	F,

SI les quantitez A, B, C, & les quantitez D, E, F, ſont proportionnelles ; c'eſt-à-dire, qu'il y ait même raiſon de A à B, que de D à E; de B à C, que de E à F : il y aura auſſi même raiſon de A à C, que de D à F.

Démonſtration.

S'il y avoit plus grande raiſon de A à C, que de D à F ; A contiendroit une partie aliquote de C ; par exemple la moitié, plus de fois que D ne contiendroit la moitié de F : Suppoſons que la moitié de C eſt douze fois dans A, & que la moitié de F eſt ſeulement onze fois dans D. Or parce qu'il y a même raiſon de B à C, que de E à F; la quantité B contiendra la moitié de

C, autant de fois que E contient la moitié de F : Supposons que ces moitiez se trouvent six fois dans B & E. A, qui contient douze fois la moitié de C, aura plus grande raison à B, qui contient six fois la moitié de C; que D qui contient seulement onze fois la moitié de F à E, qui la contient six fois. Il y aura donc plus grande raison de A à B, que de D à E, quoique nous ayons supposé le contraire.

USAGE.

Cette Proposition sert pour démontrer la Prop. XVIII. du Livre suivant, & plusieurs autres belles Propositions, comme par exemple le Lemme XII. de la Gnomonique de M. Ozanam.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

La raison d'égalité sans ordre.

Si deux rangs de termes sont en même raison mal rangés; les premiers & les derniers de l'un & de l'autre seront proportionnels.

A,	B,	C,	D,	E,	F,	G,
2.	6.	3.	8.	4.	2.	1.

SI les quantitez A, B, C, & les autres

D, E, F, en pareil nombre, ſont en même raiſon mal rangées ; c'eſt-à-dire qu'il y ait même raiſon de A à B que de E à F ; & la même de B à C, que de D à E : il y aura même raiſon de A à C, que de D à F. Qu'il y ait même raiſon de B à C, que de F à G.

Démonſtration.

Puiſqu'il y a même raiſon de A à B, que de E à F ; & de B à C, que de F à G ; il y aura auſſi même raiſon de A à C, que de E à G, (par la 22.) De plus, puis qu'il y a même raiſon de B à C, que de D à E, & de F à G ; il y aura (par la 11.) même raiſon de D à E, que de F à G : & par échange (ſelon la 16.) il y aura même raiſon de D à F, que de E à G. Or comme E eſt à G, ainſi A eſt à C, ainſi que nous avons déja prouvé. Donc comme A eſt à C, ainſi D eſt à F.

USAGE.

Cette Propoſition ſera pour démontrer que dans on triangle rectiligne, les ſinus des angles ſont proportionnels à leurs côtez oppoſés, & que dans un Triangle ſpherique les ſinus des angles ſont proportionnels aux ſinus de leurs côtez oppoſés, comme l'on peut voir dans la Trigonometrie rectiligne & ſpherique de M. Ozanam.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

S'il y a même raison, de la premiere quantité à la seconde, que de la troisieme à la quatrieme; & la même, de la cinquiéme à la seconde, que de la sixiéme à la quatriéme: il y aura même raison de la premiere avec la cinquiéme à la seconde, que de la troisiéme avec la sixiéme à la quatriéme.

E.		F.	
4.		6.	
6.	2.	9.	3.
A,	B,	C,	D.

S'Il y a même raison de A à B, que de C à D; de E à B, que de F à D: il y aura même raison de A & E à B, que de C & F à D.

Démonstration.

Puisqu'il y a même raison de A à B, que de C à D; A contiendra quelque partie aliquote que ce soit de B, autant de fois que C contient une semblable partie aliquote de D (par la 5. défin.) Pareillement E contiendra la même partie aliquote de B, autant de fois que F contiendra une semblable partie aliquote de D: ainsi A & E contiendront quelque partie aliquote de B, que ce soit, autant de fois que C & F contiennent une semblable partie aliquote de D.

PROPOSITION XXV.

THEOREME.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite surpasseront les deux autres.

A,	C,	E,	F.
12.	9.	4.	3.
8.	6.		
B.	D.		

SI les quatre grandeurs A, C, E, F, sont proportionnelles; que A soit la plus grande, & F la plus petite, A & F seront plus grandes que C & E.

Puisqu'il y a même raison de A à C, que de E à F, & qu'on suppose que A est plus grande que E; C sera aussi plus grande que F (par la 14.) Otez E de A & F de C, & que les restes soient B & D.

Démonstration.

Puisqu'il y a même raison de A à C, que de E à F, il y aura aussi par la 19. même raison de B à D, que de A à C, & A étant supposée plus grande que C, B sera aussi plus grande que D; & si l'on y ajoûte E & F de part & d'autre, B, E & F sont plus grandes que D, E & F; mais B, E & F sont égales à A & F, puisque B & E égalent A; & D, E & F sont égales à C & E, puisque D & F égalent C. Donc A
&

& F sont plus grandes que E & C.

USAGE.

On démontre dans cette Proposition, une proprieté de la proportionalité Géometrique, qui lui sert comme de difference, & qui la distingue de la proportionalité Arithmetique : car dans cette derniere, les deux termes du milieu sont égaux aux deux extremes: & dans la Géometrique, le plus grand & le plus petit surpassent les deux autres.

Quoique les neuf Propositions suivantes ne soient pas d'Euclide, j'ai crû que je ne les devois pas omettre, parce que plusieurs s'en servent & les citent comme si elles en étoient.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

S'il y a une plus grande raison de la premiere quantité à la seconde, que de la troisiéme à la quatriéme ; la quatriéme aura plus grande raison à la troisiéme, que la seconde à la premiere.

9.	4.	6.	3.
A,	B,	C,	D.
E,			
8.			

S'Il y a plus grande raison de A à B, que de C à D ; il y aura plus grande raison de D à C, que de B à A. Supposons qu'il y ait

S

même raison de E à B, que de C à D : A sera plus grande que E, (par la 10.)

Démonstration.

Il y a même raison de E à B, que de C à D : donc (par le Corollaire de la 10.) il y aura même raison de D à C, que de B à E. Or B a plus grande raison à E qu'à A. (par la 8.) Donc il y aura plus grande raison de D à C, que de B à A.

PROPOSITION XXVII.

THEOREME.

S'il y a plus grande raison de la premiere à la seconde, que de la troisiéme à la quatriéme ; il y aura aussi plus grande raison de la premiere à la troisiéme, que de la seconde à la quatriéme.

9.	4.	6.	3.
A,	B,	C,	D,
E,			
8.			

S'Il y a plus grande raison de A à B, que de C à D ; je démontre qu'il y aura plus grande raison de A à C, que de B à D. Supposons qu'il y ait même raison de E à B, que de C à D, A sera plus grande que E.

Démonstration.

Il y a même raison de E à B, que de C

à D : Donc (par la 16.) il y aura même raiſon de E à C: que de B à D. Et parce que A eſt plus grande que E ; la raiſon de A à C ſera plus grande, que de E à C. Il y a donc plus grande raiſon de A à C, que de B à D.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME.

S'il y a plus grande raiſon de la premiere quantité à la ſeconde, que de la troiſiéme me à la quatriéme ; il y aura auſſi plus grande raiſon de la premiere & ſeconde à la ſeconde, que de la troiſiéme & quatriéme, à la quatriéme.

9.	4.	6.	3.
A,	B,	C,	D.
E,			
18.			

SI la raiſon de A à B, eſt plus grande que celle de C à D : il y aura auſſi plus grande raiſon de A & B à B, que de C & D à D. Suppoſons qu'il y ait même raiſon de E à B, que de C à D.

Démonſtration.

Il y a même raiſon de E à B, que de C à D : Donc (par la 18.) il y aura même raiſon de E & B à B, que de C & D à D.

Et A & B étant plus grande que E & B, il y aura plus grande raison de A & B à B, que de E & B à B; & par consequent que de C & D à D.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME.

Si la premiere avec la seconde, a plus grande de raison à la seconde, que la troisiéme avec la quatriéme, à la quatriéme : la premiere aura plus grande raison à la seconde; que la troisiéme à la quatriéme.

9.	4.	6.	3.
A,	B,	C,	D.
E,			
8.			

S'Il y a plus grande raison de A & B à B, que de C & D à D; il y aura aussi plus grande raison de A à B, que de C à D. Supposons que la raison de E & B à B est la même que C & D à D; E & B sera plus petite que A & B, & E plus petite que A.

Démonstration.

On suppose que E & B est à B, en même raison que C & D à D: donc en divisant (par la 17.) il y aura même raison de E à B, que de C à D: Et A étant plus grande que E; la raison de A à B sera plus grande, que de C à D.

PROPOSITION XXX.

THEOREME.

Si la premiere avec la seconde, a plus grande raison à la seconde ; que la troisiéme avec la quatriéme, à la quatriéme ; la premiere avec la seconde aura plus petite raison à la premiere, que la troisiéme avec la quatriéme, à la troisiéme.

9.	4.	6.	3.
A :	B,	C,	D,

SI A & B a plus grande raison à B, que C & D à D : A & B aura plus petite raison à A, que C & D à C.

Démonstration.

Nous supposons que la raison de A & B à B, est plus grande que C & D à D : il y aura donc plus grande raison de A à B, que de C à D, (par la 29.) Et (par la 26.) il y aura plus grande raison de D à C, que de B à A. Donc en composant (par la 28.) la raison de C & D à C sera plus grande que de A & B à A.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

Si plusieurs quantitez sont en plus grande raison que pareil nombre d'autres quantitez, rangées de même façon ; la premiere du premier rang aura plus grande raison à la derniere ; que la premiere du second rang, à la derniere.

16.	10.	3.	9.	6.	2.
A,	B,	C,	D,	E,	F,

S'Il y a plus grande raison de A à B, que de D à E : & si B a plus grande raison à C que E à F, il y aura plus grande raison de A à C, que de D à F.

Démonstration.

Puisqu'il y a plus grande raisou de A à B, que de D à E; il y aura aussi plus grande raison de A à D, que de B à E : Et parce qu'il y a plus grande raison de B à C, que de E à F ; il y aura aussi plus grande raison de B à E, que de C à F. Donc il y aura plus grande raison de A à D que de C à F ; & par échange (par la 27.) il y aura plus grande raison de A à C, que de D à F.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

Si plusieurs quantitez sont en plus grande raison que pareil nombre d'autres quantitez, rangées d'autre façon : la premiere du premier rang, aura plus grande raison à la derniere, que la premiere du second rang, à la derniere.

B		F			
12.		3.			
13.	6.	2.	4.	2.	1.
A.	C.	E.	H.	I.	K.

S'Il y a plus grande raison de A à C, que de I à K; & si C a plus grande raison à E que H à I : la raison de A à E sera plus grande que la raison de H à K. Supposons que B a même raison à C, que I à K; A sera plus grande que B : Pareillement, qu'il y ait même raison de C à F, que de H à I; F sera plus grande que E.

Démonstration.

Puisque nous supposons qu'il y a même raison de B à C, que de I à K; & de C à F, que de H à I: il y aura même raison de B à E, que de H à K (par la 23.) Or il y a plus grande raison de A à F, que de

B à F (par la 8.) & la raiſon de A à E, eſt plus grande que celle de A à F ; puiſque F eſt plus grande que E. Il y a donc plus grande raiſon de A à E, que de H à K.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

Si le tout a plus grande raiſon au tout, que la partie à la partie : Le reſte aura plus grande raiſon au reſte, que le tout au tout.

13.	4.	6.	2.
A,	B,	C,	D,

S'Il y a plus grande raiſon de A & B à C & D, que de B à D ; il y aura plus grande raiſon de A à C, que de A & B à C & D.

Démonſtration.

Nous ſuppoſons qu'il y a plus grande raiſon de A & B à C & D, que de B à D: Donc (par la 28.) il y aura plus grande raiſon de A & B à B, que de C & D à D, & (par la 30.) il y aura moindre raiſon de A & B à A, que de C & D à C, & (par la 26.) il y aura plus grande raiſon de A à C, que de A & B à C & D.

PRO-

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME.

Si on propoſe deux rangs de grandeurs ; & ſi la raiſon de la premiere du premier rang , à la premiere du ſecond , eſt plus grande que celle de la ſeconde , a la ſeconde ; & celle-ci plus grande que celle de la troiſiéme à la troiſiéme. La raiſon de tout le premier rang à tout le ſecond ſera plus grande que de la derniere du premier rang a la derniere du ſecond , & auſſi que de tout le premier rang , excepté la premiere à tout le ſecond rang , excepté auſſi la premiere ; mais elle ſera plus petite que la raiſon de la premiere du premier rang à la premiere du ſecond.

12.	6.	3.	4.	3.	2.
A,	B,	C,	E,	F,	G,

S'Il y a plus grande raiſon de A à E , que de B à F ; & ſi la raiſon de B à F eſt plus grande , que celle de C à G : Je dis premierement que A , B & C , ont plus grande raiſon à E, F & G , que C à G.

Demonstration.

Il y a plus grande raison de A à E, que de B à F ; il y aura aussi plus grande raison de A à B, que de E à F : & en composant, la raison de A & B à B, sera plus grande que de E & F à F ; & par échange il y aura plus grande raison de A & B à E & F, que de B à F. Or la raison de B à F, est plus grande que celle de C à G. Donc la raison de A & B à E & F est plus grande que celle de C à G & en composant, il y aura plus grande raison de A, B & C, à E, F & G, que de C à G.

Je dis en second lieu, que la raison de A, B & C, à E, F & G, est plus grande, que la raison de B & C, à F & G.

Demonstration.

On suppose qu'il y a plus grande raison de A à E, que de B à F & par échange, la raison de A à B, est plus grande que celle de E à F : & en composant, il y aura plus grande raison de A & B à B, que de E & F à F ; & par échange, la raison de A & B à E & F, sera plus grande, que celle de B à F. De plus, puisqu'il y a plus grande raison du tout A & B, à E & F, que de la partie B à F : A (par la 33.) aura plus grande raison à E, que A & B à

E & F ; & il y aura plus grande raiſon de A à E, que de B & C à B & G. Et par échange il y aura plus grande raiſon de A à B & C, que de E à F & G ; & en compoſant, il y aura plus grande raiſon de A, B & C, à E, F & G, que de B & C à F & G.

Je dis en troiſiéme lieu qu'il y a plus grande raiſon de A à E, que de A, B & C à E, F & G.

Démonſtration.

Nous avons démontré qu'il y avoit plus grande raiſon de A, B & C, à E, F & G, que de la partie B & C, à la partie F & G : Il y aura donc plus grande raiſon de A à E, que de A, B & C à E, F & G, (par la 33.)





AVERTISSEMENT.

CE cinquiéme Livre avoit été dans l'Edition derniere augmenté de plusieurs Propositions démontrees par l'Algebre la plus simple, & même l'on avoit appliqué cette maniere de démontrer à quelques-unes des Propositions du même Livre, afin de les rendre plus intelligibles ; mais comme l'on avoit obmis de mettre dans ce Supplément les calculs nécessaires, pour entendre les Démonstrations Algebriques qui y étoient : Le Libraire a jugé qu'il valoit mieux donner dans la presente Edition ces calculs, que d'ôter au Public le present qu'il lui avoit fait. Et c'est dans cette vûe que je vais expliquer la simplicité des quatre premieres Régles d'Algebre.

DEFINITIONS.

1. Au lieu de répresenter les grandeurs par des nombres, nous les répresenterons par des lettres de l'alphabet ; sçavoir les lignes par les lettres *a*, *b*, *c*, &c. les superficies par deux lettres mises l'une près

de l'autre, comme, *ac*, *bd*, *aa*, &c. & les ſolides par trois lettres miſes auſſi l'une près de l'autre, comme, *abd*, *cdh*, *aaa*, &c.

2. Il ſuit 1°. De ce que *ac*, & *bd*, repréſentent des ſuperficies, que *ac* ſera un rectangle, dont l'une des dimenſions eſt exprimée par *a*, c'eſt-à-dire la longueur, & la largeur par *c*; mais *aa* repréſente un quarré, puiſque la longueur & la largeur ſont chacune exprimée par la même lettre *a*; car l'on nomme toûjours les lignes égales par les mêmes lettres: 2°. De ce que *ac* & *aa* repréſente des ſuperficies, l'on voit viſiblement que *ac* & *aa* nous donne l'idée de la multiplication de la grandeur attribuée à *a* par celle qui eſt attribué à *c*; ainſi ſi *a* eſt égal à 3 & *c* à 4, l'on peut dire que *ac* eſt égal à 12, de même ſi *a* égal 5, *aa* ſera égal à 25; car *aa* marque la multiplication de la valeur 5, qui eſt attribué à *a* par elle-même.

3. L'on verra encore de ce que *abd* & *aaa* exprime des ſolides, c'eſt-à-dire le produit formé par la longueur, la largeur & l'épaiſſeur d'un corps, que *abd* marque un ſolide qui a ſes trois dimenſions inégales, qu'on appelle *paralellepipede*, & *aaa* celui qui les a égales, lequel eſt appellé *Cube*.

4. Mais pour me faire entendre, je dirai qu'il suffit de regarder ici *ac* comme le produit de deux grandeurs, & *abc* comme celui de trois, par exemple, si *a* est égal à 4, *b* à 5, & *c* à 3, l'on peut dire que *abc* est égal a 60, de même *abcd*, marquera la multiplication des quatre grandeurs attribuées aux quatre lettres *a*, *b*, *c*, & *d*, & cela par la même raison qu'on attribuë l'idée de quatre à la Figure ou au chiffre 4.

5. Cette façon de représenter les grandeurs est indéterminée; car nous ne distinguons pas par la lettre *a* qui exprime une ligne, la longueur de cette ligne en pied & en pouces; mais seulement que *a* marque une certaine longueur, & *b* une autre qui est plus ou moins grande, de même, *ac*, *bd*, marqueront des superficies differentes, sans en déterminer leur valeur en nombres.

6. Il suit de cette maniere, de représenter les grandeurs que l'on ne pourra faire l'addition des deux lignes *a* & *b*, qu'en disant la premiere plus la seconde, c'est-à-dire *a* plus *b*, de même pour avoir l'idée de la somme des deux rectangles *ac* & *bc*; l'on est obligé de dire le premier rectangle plus le second, qui est la même chose que *ac* plus *bc*, il en est de

même pour avoir la ſomme des deux ſolides *abc* & *fga*, qui ſe trouve dans cette expreſſion *abd* plus *fga*. Il ſuit de-là, viſiblement que l'adition eſt marquée par le mot *plus*, & que pour ajoûter pluſieurs grandeurs *a*, *b*, *c*, &c. ou pour en exprimer la ſomme, il faut les joindre les unes aux autres par ce mot *plus*; ainſi leur ſomme ſera, *a* plus *b* plus *c plus* &c. mais ſi pour abreger, l'on ſuppoſe que ce ſigne + faſſe le mot *plus*, il eſt viſible que l'addition *a* plus *b* plus *c plus* &c. ſera changé à cette expreſſion $a + b + c +$ &c. & c'eſt cette maniere de joindre pluſieurs grandeurs enſemble, que l'on appelle addition d'Algebre.

7. Si nous faiſons encore attention à la maniere dont nous exprimons les grandeurs par *a* & *b*, *ac* & *bc*; *abc* & *agf*, nous verrons qu'on ne peut ôter *b* de *a* qu'en diſant *a* moins *b*, & que pour ôter *bc* de *ac*, il faudra écrire *ac* moins *bc*, de même *agf* ſera retranché de *abc* en mettant *abc* moins *agf*; d'où il eſt évident que c'eſt le mot *moins* qui marque qu'une grandeur eſt ſouſtraite d'une autre; ainſi voulant ôter de la grandeur *a* les grandeurs *b*, *c* & *d*, je vois qu'il faut écrire *a* moins *b* moins *c* moins *d*, & comme plus *b* ou *b*, eſt la même choſe, il eſt

clair que les ſignes *plus* ſuppoſés aux grandeurs, *b*, *c*, & *d* ſont changés en moins dans l'expreſſion, *a* moins *b* moins *c* moins *d*, & ſi pour abreger l'on regarde cette marque — comme ſignifiant *moins*; alors *a* moins *b* moins *c* moins *d*, ſera exprime par $a - b - c - d$, & c'eſt ce qui s'appelle ſouſtraction d'Algebre.

8. Les grandeurs Algebriques qui ſont *a* ou $+ a$ &c. s'appelle *poſitives*, & celle qui ſont $- a$, c'eſt-à-dire précèdé du ſigne moins, s'appellent *négatives*. Ainſi nous dirons que *a* ou $+ a$, *b* ou $+ b$, *c* ou + ſont des grandeurs poſitives, & que $- a$, & $- bc$ ſont des grandeurs négatives.

9. Au lieu du mot égal on employe cette marque =, ainſi ſi *a* eſt ſuppoſé égal à *b*, l'on écrit $a = b$ au lieu de *a*, égal *b*, de même ſi *ac* eſt égal à *bd*, l'on met $ac = bd$. Pour marquer qu'une grandeur *a* doit être diviſée par la grandeur *b*, l'on écrit $\frac{a}{b}$, ainſi $\frac{acd}{bd}$, ſignifie que *acd* doit être diviſé par *bd*, & pour faciliter l'intelligence des commençans pour qui j'écris, je ſuppoſerai $a = 4$, $c = 3$, $d = 2$, $b = 6$, par conſequent $acd = 24$ & $bd = 12$, donc $\frac{acd}{bd} = \frac{24}{12} = 2$

ADDITION D'ALGEBRE.

10. Si l'on veut ajoûter la grandeur $a+b+c$ (qu'on appelle *complexe*, à cause qu'elle est formée de plusieurs qui sont a, b, & c,) avec la grandeur $g+h-d$, l'on sçait (nombre 6) que leur somme doit être la premiere $a+b+c$ plus la seconde $g+h-d$, & en mettant le signe $+$ au lieu du mot *plus*, on aura leur somme exprimée par $a+b+c+g+h-d$; d'où l'on voit que pour ajoûter tant de grandeurs que l'on voudra, il faut les joindre les unes aux autres avec leurs signes.

11. Il suit de-là, que pour additioner $a+b$, $c-d$, & $-c+a$, il faut écrire $a+b$, $+c-d-c+a$ pour avoir leur somme; & comme il y a dans cette expression deux fois la lettre a avec le même signe $+$, l'on pourra abreger en écrivant $2a$ au lieu de $a+a$; car $a+a$ est la même chose que $2a$, un écu plus un écu est la même chose que deux écus; par consequent $a+b+c-d-c+a$, sera égal à $2a+b+c-d-c$, dans laquelle l'on fera attention qu'il y a aussi deux fois la lettre c avec des signes differens, ce qui se détruit; car $+c-c$ n'est rien, de même qu'un écu

moins un écu eſt égal à zero ; ainſi la grandeur $2a + b + c - d - c$ ſe réduit à $2a + b - d$; d'où l'on voit que les grandeurs dans leſquelles il y aura les mêmes lettres, & un même nombre de fois, ſe pourront abreger ou réduire à une expreſſion plus ſimple, c'eſt ce qui s'appelle *Réduction*.

12. Si l'on a pluſieurs Rectangles $ac + bc - ad$, à ajoûter avec les Rectangles $3ac - ad - 3bc$, leur ſomme ſera $ac + bc - ad + 3ac - ad - 3bc$ qui ſe réduira à $4ac - 2bc - 2ad$; car il y a dans cette ſomme $ac + 3ac$ qui valent $4ac$; il y a auſſi $+ bc - 3bc$ qui ne font que $- 2bc$. Puiſque $+ bc$ détruit (nombre 11.) dans $- 3bc$ un moins bc, par conſequent il reſte $- 2bc$, l'on voit encore que $- ad$ ſe trouvant deux fois dans $ac + bc - ad + 3ac - ad - 3bc$, qu'ils ſe réduiront à $- 2ad$, de la même maniere que moins un écu avec moins un écu ſont égal à moins deux écus.

SOUSTRACTION D'ALGEBRE.

13. Pour ſouſtraire une quantité d'une autre, il faut changer les lignes + en − dans la quantité qui doit être ôtée, cela eſt évident par ce que nous avons dit (nombre 7.) & joindre cette grandeur ainſi

changée à celle de qui elle doit être souſtraite; ainſi pour ôter $a + d$ de $b - c$, il faut écrire $b - c - a - d$.

Mais ſi la grandeur que l'on veut ôter à des quantitez négatives, c'eſt-à-dire qu'il en a le ſigne —, il les faut changer en +, & pour en être convaincu nous ſupposerons qu'il faille ôter $2a - a$ de b, l'on voit viſiblement à cauſe que $2a - a$ ſont égaux à $+a$ qu'il faut écrire $b - a$ pour avoir la difference; or $2a - a$ étant ſouſtrait de b ſans être réduit, l'on aura ſelon la régle preſcrite de changer les ſignes de la quantité $2a - a$, que l'on veut ôter de b, en la joignant à b ainſi changé, $b - 2a + a$, qui étant égales à $b - a$ qui eſt la vrai difference, fait voir évidemment que les ſignes — doivent être changés en +, dans la quantité qui doit être ſouſtraite.

De-là il ſuit que pour ôter $ac - bd + aa - dd$ de $aa - bd$, qu'il faut écrire $aa - bd - ac + bd - aa + ad = ad - ac$, de même $6 - 2$ ſeront retranchés de $12 - 3$, en écrivant $12 - 3 - 6 + 2$ qui ſont égal à 5.

MULTIPLICATION D'ALGEBRE.

14. Il eſt évident que pour multiplier une grandeur par une autre, il faut multiplier toutes les parties qui la com-

posent par celles de l'autre, & faire une addition des produits de toutes ces parties pour avoir celui des deux grandeurs.

15. Il suit de ce principe, que pour multiplier la quantité $a + b$ qui est composée des deux parties a & b par c, qu'il faut multiplier les deux parties a & b par c, ce qui donnera (nombre 1. 2. & 4.) ac & bc, & étant ajoûté donneront pour le produit total $ac + bc$, pour la valeur de $a + b$ multiplié par c, de-là il est visible *que* $+$ *multiplié par* $+$ *donne* $+$.

Il suit encore de ce que le produit de deux grandeurs, dépend de la multiplication des parties qui composent l'une par celles qui composent l'autre, qu'il faut commencer par multiplier toutes les parties de la premiere grandeur, par la premiere partie de la seconde, & encore toutes les parties de la même premiere, par la seconde partie qui compose la seconde grandeur. Ainsi de suite, & la somme de tous ses produits donnera celui que l'on cherche.

16. Par exemple, pour multiplier $b + c$ par $a + d$, il faut 1°. multiplier $b + c$ par a, ce qui donnera (nombre 15.) $ab + ac$, 2°. par d, ce qui donnera $bd + cd$, lesquels étant joints à $ab + ac$ donneront $ab + ac + bd + cd$ pour le produit de

$b+c$ multiplié par $a+d$.

17. Pour multiplier $2a$ par $2c$, il faut multiplier les nombres l'un par l'autre, & y joindre les lettres a & c, sans y mettre de signe, ce qui donnera $4ac$, pour le produit de $2a$ par $2c$; car $2a$ sont égal à $a+a$ & $2c$ à $c+c$; or $a+a$ multiplié par $c+c$ donneront (nombre 16.) $ac+ac+ac+ac=4ac$; ainsi $3a$ multiplié par $4cd$ produiront $12cad$, de même le produit de $2a+3c$ par $2d$ sera égal à $4ad+6cd$, ainsi des autres.

18. Jusqu'ici nous n'avons multiplié que des grandeurs qui avoient le signe $+$; mais quand elles ont des signes $-$, il faut faire attention que $-$ *multiplié par* $+$ *ou* $+$ *par* $-$ *donne* $-$ & au contraire, $-$ *multiplié par* $-$ *donne* $+$.

Pour démontrer 1°. que $-$ multiplié par $+$ donne $-$, nous supposerons qu'il faut multiplier $2a-a$ par $+c$, il est visible à cause que $2a-a=a$, que le produit doit être ac; or $2a-a$ sans être réduit, étant multiplié par c donnera en suivant la regle des signes (nombre 18.) $2ac-ac$ qui étant égal à ac, qui est le vrai produit, fait voir que $-$ *multiplié par* $+$ *donne* $-$, il en est de même de $+$ par $-$.

Pour faire voir 2°. que $-$ multiplié par $-$ donne $+$, nous supposerons qu'il faut

multipier $2a-a$ par $2c-c$, l'on voit que le produit doit être ac à cause que $2a-a = a$ & $2c-c=c$, & en suivant la regle des signes (nombre 18.) l'on aura 1°. que $2a-a$ par $-2c$ produira $4ac - 2ac$, 2°. que $2a-a$ par $-c$ donnera $-2ac+ac$; mais ces deux quantités jointes ensemble donneront $4ac-2ac-2ac+ac = ac$ qui est le vrai produit, *donc — par — donne +*: Il suit de-là que $a-b$ multiplié par $a-b$ donneront $aa-ab-ab+bb=aa-2ab+bb$, & que $6-2$ par $6-2$ donnera $36-12-12+4=16$.

Exemple de multiplication.

	$a-b$	$6-2$
	$a-b$	$6-2$
	$aa-ab$	$36-12$
	$-ab+bb$	$-12+4$
produit	$aa-2ab+bb$	$36-24+4$

DIVISION D'ALGEBRE.

L'on sçait que toutes les fois qu'un produit est formé de deux grandeurs, qu'en le divisant par l'une il vient l'autre au quotient; par exemple 12 ayant été for-

mé de 4 multiplié par 3, si on le divise par 4, il viendra 3 au quotient, & au contraire étant divisé par 3, on trouvera le nombre 4.

Il suit de-là, que lorsque l'on connoît un produit & une des deux grandeurs qui l'ont formé, que pour avoir celle qu'on ne connoît point, il faut diviser ce produit par la quantité connuë, & le quotient donnera celle que l'on cherche.

Cela posé, il est visible que ac étant divisé par a, qu'il viendra au quotient la grandeur c, puisque ac est un produit formé de a par c, de même $2abd$ divisé par $2a$ donnera bd; car l'on sçait que le diviseur $2a$ multiplié par le quotient bd doit donner un produit égal au divident $2abd$, afin que la division soit bien faite; or $2a$ multiplié par bd, donne $2abd$; donc, &c.

Pour diviser $ac+bc$ par c, nous commencerons à diviser la premiere partie ac, en disant qui de ac ôte c vient a, qu'il faut écrire au quotient, ensuite l'on dira qui de $+bc$ ôte c reste b, ou $+b$, qui faut joindre à a, ainsi le quotient est $a+b$, car si l'on multiplie $a+b$ par c, il viendra le dividende $ac+bc$, qui en fait la preuve. Il suit de-là, *que* $+$ *divisé par* $+$ *donne* $+$.

Je dis encore que divisant $+$ par $-$, ou $-$ par $+$ qu'il vient $-$ au quotient; & que $-$ divisé par $-$ donne $+$.

Pour démontrer 1°. que — divisé par + donne — ; nous supposerons que l'on veut diviser $-ab$ par $+a$, l'on sçait que le quotient qui viendra, doit être tel, qu'étant multiplié par le diviseur $+a$ il donne le dividende $-ab$; or en supposant que $-ab$ divisé par $+a$ donne $-b$, l'on trouve par la multiplication de $+a$ par $-b$, le produit $-2ab$, donc — divisé par + donne —.

2°. je dis que $-ab$ divisé par $-a$ donne au quotient $+b$; car il faut que le diviseur multiplié par le quotient, donne le dividende $-ab$; or le quotient $+b$ multiplié par $-a$ donne $-ab$ en observant la loi de la multiplication; donc — divisé par — donne +.

Il suit de-là que divisant $ac-cd+bc$ par c, l'on trouvera $a-d+b$ au quotient, & cela en disant qui de $+ac$ ôte $+c$, vient $+a$, de même qui de $-cd$ ôte $+c$, vient $-d$, & de $+bc$ ôtant $+c$ viendra $+b$, lesquelles étant ajoutées ensemble, donneront $a-d+b$ pour le quotient.

Quand le diviseur n'est point composé de plusieurs parties, c'est-à-dire qu'il n'est pas complexe, la division est aisée à faire, mais lorsqu'il en a plusieurs aussi-bien que le dividende, elle devient plus embarassante. Pour en faire voir la maniere, nous supposerons qu'on doive diviser $aa+2ab$

+

$+bb$ par $a+b$. Je dis qu'il faut 1°. diviser aa du dividende par la grandeur a du diviseur, l'on trouvera a, qu'il faut mettre au quotient, 2°. il faut multiplier le diviseur $a+b$ par le quotient a, ce qui donnera $aa+ab$ qu'il faut soustraire du dividende $aa+2ab+bb$, ainsi on aura $aa+2ab+bb-aa-ab$ qui se réduit à $ab+bb$, qui est le reste du dividende; 3°. il faut encore diviser ce reste par $a+b$, en disant qui de ab ôte a, il vient $+b$; ensuite multiplier le diviseur par b, ce qui donnera $ab+bb$, qu'il faut ôter du reste $ab+bb$, en écrivant $ab+bb-ab-bb$ qui étant égal à zero, fait voir que la division est exacte; ainsi le quotient est donc $a+b$, car nous avons ôté du dividende.

1°. Le produit du diviseur $a+b$ par a; 2°. celui du même diviseur par b; or le produit du diviseur $a+b$ par la partie a, & celui de $a+b$ par la partie b étant joints ensemble donnent (nombre 14.) le produit du diviseur $a+b$ par le quotient $a+b$, & comme l'ayant ôté du dividende il n'est rien resté, il s'ensuit que $a+b$ est le véritable quotient.

Exemple de Division.

Dividende . . $aa + 2ab + bb$ } a quotient
Diviseur . . . $a + b$
Multiplicat. a

Produit . . . . $aa + ab$
Soustraction $aa + 2ab + bb - aa - ab$
reste . . . . . . $ab + bb$
Dividende du reste $ab + bb$ } $a + b$
Diviseur . . . . $a + b$
Quotient . . . . b

Produit . . . . $ab + bb$
Soustraction $ab + bb - ab - bb = 0$

Second Exemple de Division.

Dividende . . . . $aa - bb$ } a
Diviseur . . . . $a + b$
Multiplication . . . . a

Produit . . . . $aa + ab$
Soustraction . . . $aa - bb - aa - ab$
Reste . . . . . . $-ab - bb$
Dividende du reste $-ab - bb$ } $a - b$
Diviseur . . . . $a + b$
Multiplication . . $-b$

Produit . . . . . . $-ab - bb$
Soustraction . . . . $-ab - bb + ab + bb = 0$

Quand une quantité eſt précedée d'un chiffre comme $6ac$ (lequel eſt appellé *coëfficient*,) & qu'on veut la diviſer par une grandeur qui en a un auſſi ; il faut diviſer le premier par le ſecond, ainſi $6ac$ étant diviſé par $2a$ donneront au quotient $3c$, puiſque $3c$ multiplié par $2a$ donne le divident $6ac$.

REMARQUE.

Ce que nous avons dit des quatre premieres Regles d'Algebre, étant ſuffiſant pour entendre les Démonſtrations ſuivantes ; qui eſt uniquement ce que nous nous ſommes propoſés ; nous n'en dirons rien davantage, ſi le Lecteur eſt curieux, il aura recours aux Auteurs qui ont eu cette ſcience ſi néceſſaire pour objet.

DEFINITIONS.

Nous avons vû dans le cinquiéme Livre que le rapport, ou la raiſon d'une grandeur que nous appellerons a, à une autre b, dépendoient de la maniere de comparer la premiere a à la ſeconde b ; or cette comparaiſon pouvant être de deux façons, ſçavoir 1°. en conſiderant combien a, contient de fois b, ou des aliquotes de b, ou ce qui eſt la même choſe, combien b contient de fois a ou des aliquotes de a, cette compa-

raiſon a été appellé rapport ou raiſon *géométrique.* Ainſi la valeur du rapport géométrique d'une grandeur a à une autre b, ſe trouvera en diviſant la premiere a par la ſeconde b, par conſequent $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{12}{4}$, expriment des rapports géométriques.

2°. Si la comparaiſon de la grandeur a à une autre b, ſe fait en conſiderant combien la premiere ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſée par la ſeconde, cette comparaiſon s'appelle une raiſon ou rapport *arithmetique;* ainſi la valeur du rapport arithmetique ſe trouvera en ſouſtrayant la plus petite de la plus grande; par conſequent $a-b$, $12-4$ expriment des rapports arithmetiques.

L'on dit que le rapport géometrique de a à b, eſt égal à celui de c à d, ſi la premiere grandeur a, contient autant de fois b, que c contient de fois d; ainſi ſi le nombre de fois que b eſt dans a eſt nommé f, c'eſt-à-dire ſi f eſt le quotient de $\frac{a}{b}$, f ſera auſſi celui de $\frac{c}{d}$, puiſque l'on ſuppoſe que d eſt dans c, autant de fois que b eſt dans a, par conſequent l'on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cette égalité de rap-

port s'appelle proportion *géometrique*, laquelle ſe marque ainſi $a, b :: c, d$, ce qui ſignifie, a eſt à b comme c eſt d.

La proportion arithmetique eſt auſſi composée de deux rapports arithmetiques égaux, ainſi les quatre grandeurs a, b, c, d, ſeront en proportion ſi la difference de la premiere a à la ſeconde b, c'eſt-à-dire $a - b$ eſt égale à celle de la troiſiéme c à la quatriéme d qui eſt $c - d$, laquelle ſe marque ainſi $a, b : c, d$, ce qui ſignifie que a eſt b comme c eſt d.

Quand il s'agira de rapport ou de proportion géometrique, l'on dira ſeulement un rapport, une proportion, ſans y joindre le mot de géometrique; mais quand le rapport ou la proportion ſera arithmetique, l'on dira un rapport arithmetique, une proportion arithmetique.

L'on appelle le premier & le dernier terme d'une proportion tant géometrique, qu'arithmetique les *extrêmes*, & le ſecond & le troiſiéme, les *moyens*; ainſi dans la proportion, $a, b :: c, d$, le premier a, & le dernier d ſont les extrêmes, & b & c ſont les moyens.

PROPOSITION I.

THEOREME.

Dans toutes proportions géometriques, $a, b :: c, d$, je dis que le produit

ad des extrêmes est égal à *bc* qui est celui des moyens.

Démonstration.

Puisque les quatre grandeurs attribuées aux quatres lettres *a*, *b*, *c*, *d* sont en proportion, la premiere *a* contient une aliquotte de *b*, autant de fois que la troisiéme *c* contient une semblable partie aliquotte de *d*; or si l'on suppose que *b* soit divisé en 10, en 20, ou en 100 parties égales, il faudra que *d* soit divisé en 10, en 20, ou en 100. parties aussi égales, & si on appelle *x* la 10e, la 20e, ou la 100e partie de *b*, l'on verra que *b* sera égal à 10*x*, à 20*x* ou à 100*x*, de même nommant *y*, la 10e, la 20e, ou la 100e partie de *d*, on aura *d* égal à 10*y*, 20*y* ou 100*y*, & si au lieu des nombres, 10, 20, ou 100, qui expriment la quantité des parties dont *b* & *d* ont été supposé divisés; on prend la lettre *n*, pour marquer le nombre des aliquottes dont on conçoit que *b*, & *d* sont partagés, l'on aura $nx = b$ & $ny = d$.

Présentement si l'on suppose que *m* exprime le nombre de fois que *x* est dans *a*, *m* marquera aussi le nombre de fois que *y* est dans *c*, puisque *a* & *c* doivent contenir une même quantité de fois les ali-

quottes semblables de b & de d, ainsi on aura donc $mx=a$ & $my=c$, & si l'on met dans la proportion $a, b :: c, d$ à la place des lettres a, b, c & d leur valeur, on aura son égal, $mx, nx :: my, ny$, dans laquelle l'on voit que le produit des extrêmes $mxny$ est égal à $nxmy$ qui est celui des moyens, puisque l'un & l'autre sont formés des mêmes multiplicateurs. C. Q. F. D.

Seconde Démonstration.

On peut prouver plus aisément que si $a, b :: c, d$ le produit ad des extrêmes est égal au produit bc des moyens; en faisant attention que puisqu'il y a une proportion dans les grandeurs représentées par les lettres a, b, c, d; qui seront par exemple, quatre *lignes*, quatre *surfaces*, ou quatre *solides*, ou si l'on veut quatre nombres; qu'il faut que la premiere a contienne autant de fois la seconde b, que la troisiéme c contient de fois la quatriéme d; ainsi $\frac{a}{b}$ sera égal à $\frac{c}{d}$ c'est-à-dire que le quotient qui marquera combien de fois b est dans a, sera le même que celui qui marquera le nombre de fois que d est dans c; or supposons que ce quotient soit f, l'on aura $bf=a$ & df

$=c$, puiſque le quotient multiplié par le diviſeur eſt toûjours égal au dividende; ainſi en mettant dans la proportion a, b :: c, d, à la place de a ſa valeur bf, & à la place de c ſa valeur df, on formera celle-ci, bf, b :: df, d (qui eſt égal à la premiere,) dans laquelle multipliant les extrêmes d'une part & les moyens de l'autre, on trouvera $bfd=bdf$, puiſque l'un & l'autre ſont formés des mêmes multiplicateurs; donc que dans toute proportion le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens.

COROLLAIRE I.

Puiſqu'il faut que quatre grandeurs ſoient proportionnelles, pour que le produit des extrêmes ſoit égal à celui des moyens, il s'enſuit que lorſque ces produits ſeront égaux, les quatre quantités ſeront proportionelles; ainſi l'on ſera aſſuré que b, h :: g, f, ſi l'on ſçait que $bf=hg$.

COROLLAIRE. II.

Il ſuit encore qu'on pourra toûjours trouver à trois quantités a, b, c, une quatriéme proportionelle; car ſi on la nomme x, l'on formera cette proportion a, b :: c, x, d'où l'on tire $ax=bc$, pré-
ſentement

fentement si l'on divise ax par a, il viendra x au quotient qui sera égal à la valeur de $\frac{bc}{a}$ puisque des quantités égales divisées par une même, donnent des quotiens égaux ; d'où l'on voit que le quatriéme terme d'une proportion, est égal au produit des moyens divisé par le premier terme.

Quand la proportion est *continuë*, c'est-à-dire que les moyens sont formés de la même grandeur (qu'on appelle *moyenne* proportionnelle,) par exemple, si a, $b :: b, c$, on aura en multipliant les extrêmes d'une part, & les moyens de l'autre $ac = bb$, or comme les racines quarrées des quantités égales sont égales, il s'ensuit que la racine quarrée de bb qui est b, sera égale à celle de ac; ainsi pour connoître la valeur de b qui sert de moyen à la proportion continuë, il suffit que ac soit connuë ; car sa racine quarrée donnera la valeur de b.

Il suit delà, que pour trouver une moyenne proportionnelle aux grandeurs 4 & 9, il faut les multiplier l'une par l'autre, & extraire la racine quarrée de leur produit 36, qui se trouve de 6 pour la moyenne que l'on cherche. Ainsi la proportion continuë sera 4, 6 :: 6, 9.

La proportion continuë se marque de cette façon $\div\!\!\div$ 4, 6, 9 qui signifie 4 *est à 6 comme 6 est à 9*, & quand elle est composée de plus de trois grandeurs, continuellement proportionnelles, elle prend le nom de *progression*, par consequent $\div\!\!\div$ 2, 4, 8, 16 &c. ou $\div\!\!\div$ *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, &c. sont des progressions *géometriques*.

PROPOSITION II.

THEOREME.

Lorsque quatre grandeurs sont en proportion elles le sont encore de quatre manieres differentes, sçavoir, en raison *inverse*, en raison *alterne*, en *composant*, & en *divisant*. Voyez le commencement du cinquiéme Livre, nombre 14. 15. 16. & 17.

Ainsi il faut faire voir que si $a, b :: c, d$
On aura en raison inverse $b, a :: d, c$
En alterne . . . . $a, c :: b, d$
En composant . . . $a+b, b :: c+d, d$
Et en divisant . . . $a-b, b :: c-d, d$

Démonstration.

Puisque l'on suppose que $a, b :: c, d$; on aura $ad = bc$, & comme la raison inverse $b, a :: d, c$, & l'alterne $a, c :: b, d$, donnent aussi en multipliant les extrêmes & les moyens, $ad = bc$, il s'ensuit (Corollaire I.) que les grandeurs sont proportionnelles, par consequent l'on peut conclure en raison inverse, & en raison alterne.

L'on a en composant $a + b, b :: c + d, d$ & en divisant $a - b, b :: c - d, d$, les produits des extrêmes & des moyens de la premiere donnent $ad + bd = bc + bd$ & ceux de la seconde $ad - bd = bc - bd$, or si l'on met dans ces deux égalités supposées, à la place de ad sa valeur bc, l'on trouvera pour la premiere $bc + bd = bc + bd$, & pour la seconde $bc - bd = bc - bd$, qui sont l'une & l'autre parfaitement égales, puisqu'elles sont formées des mêmes grandeurs, ainsi (Corollaire I.) l'on peut conclure en composant & en divisant.



PROPOSITION III.

THEOREME.

SI l'on a plusieurs rapports égaux $a, b :: c, d :: g, h$, je dis que la somme des antecedens $a+c+g$ est à la somme des consequens $b+d+h$ comme un des antecedens a est à son consequent b.

Démonstration.

Pour faire voir que $a+c+g, b+d+h :: a, b$ nous ferons voir que le produit des extrêmes $ab+bc+bg=ab+ad+ah$ qui est celui des moyens. Et cela en considerant que puisque $a, b :: c, d$ on aura $ad=bc$, & comme $a, b :: g, h$, à cause que les rapports sont supposés égaux, on aura aussi $ah=bg$. Présentement si l'on met à la place de bc sa valeur ad, & à la place de bg sa valeur ah, dans le produit des extrêmes $ab+bc+bg$, il sera changé à son égal $ab+ad+ah$, lequel étant le même que celui des moyens, prouve visiblement (Corollaire I.) qu'il y a même raison de la somme des antecedens, à la somme des consequens, que d'un antecedent à son consequent.

COROLLAIRE. III.

Il suit delà, que deux grandeurs demeurent en même raison, quoique l'on ajoûte à l'une & à l'autre d'autres grandeurs, pourvû que ce qu'on ajoûte à la premiere, soit à ce qu'on ajoûte à la seconde, comme la premiere est à la seconde, car c'est précisément la proposition que l'on vient de démontrer.

Il est clair aussi, que deux grandeurs étant diminuées chacune d'autres grandeurs qui soient dans la même raison que les deux premieres, les restes conservent le même rapport, c'est-à-dire que si $a, b :: c, d$, qu'on aura $a-c, b-d :: a, b$, car c'est le contraire de ce que l'on vient de dire. De plus il est aisé de s'en convaincre, par le produit des extrêmes & des moyens, qui donnent $ab-bc = ab-ad$, en mettant dans celui des extrêmes, à la place de bc, sa valeur ad prise de la proportion $a, b :: c, d$, puis qu'alors $ab-bc$ devient $ab-ad$, qui est la même chose que le produit des moyens; donc (Corollaire I.) &c.



PROPOSITION IV.

THEOREME.

SI l'on multiplie deux grandeurs *a*, & *c* par une même grandeur *d*, je dis que les produits sont entre eux comme ces deux grandeurs, ainsi il faut faire voir que *ad*, *dc* :: *a*, *c*.

Démonstration.

L'on verra clairement que *ad*, *dc* :: *a*, *c*, puisque les produits des extrêmes *adc* & des moyens *dca* sont égaux, étant l'un & l'autre formés des mêmes grandeurs, donc (Corollaire I.) *ad*, *dc* :: *a*, *c*, & $\frac{ad}{dc} = \frac{a}{c}$.

COROLLAIRE IV.

Puisque les grandeurs $\frac{a}{b}$ étant multipliées par telle grandeur *c*, *m*, &c. donnent $\frac{ac}{bc} = \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, l'on voit évidemment que les numerateurs, & dénominateurs des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, &c. étant multipliées par un nombre quelconque 5, elles seront changées sans changer de valeur, sçavoir

$\frac{2}{3}$ en $\frac{10}{15}$, & $\frac{5}{7}$ en $\frac{25}{35}$, c'est-à-dire que $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ & $\frac{5}{7} = \frac{25}{35}$. C'est sur ce principe que la maniere de réduire les fractions en même dénomination est fondée.

PROPOSITION V.

THEOREME.

SI l'on divise deux grandeurs a & b par une même grandeur c, je dis que les quotiens seront entr'eux comme ces deux grandeurs.

Démonstration.

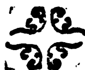
Nous supposerons qu'ayant divisé $\frac{a}{c}$ le quotient soit f, & que celui de $\frac{b}{c}$ soit g, cela posé, il faut faire voir que $f, g :: a, b$, & afin d'y parvenir, il faut faire attention que $fc = a$ & $gc = b$ étant les produits des quotiens par les diviseurs. Or si l'on met dans la proportion supposée à la place de a sa valeur fc, & à la place de b sa valeur gc, on aura son égal $f, g :: fc, gc$, dans laquelle le produit fgc des extrêmes est égal à celui des moyens gfc, puisqu'ils

ſont formés des mêmes grandeurs, donc (Corollaire I.) $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$: : a, b.

Cette propoſition auroit pû être déduite de la précedente; car puiſque le rapport $\frac{a}{b}$ ne change point par la multiplication d'une même grandeur, il ne doit pas non plus changer par la diviſion d'une même quantité, puiſque l'effet de la diviſion eſt de retrouver les grandeurs telles qu'elles étoient avant d'être multipliées.

COROLLAIRE V.

C'eſt ſur ce principe que la réduction d'une fraction à moindre *terme* eſt fondée. Par exemole $\frac{ac}{bc}$ ſe réduira à ſon égal $\frac{a}{b}$ en diviſant le numerateur ac & le dénominateur bc par la grandeur c, de même $\frac{24}{36}$ ſe réduira à ſon égal $\frac{2}{3}$ en diviſant le numerateur & le dénominateur par la même quantité 12.



PROPOSITION VI.

THEOREME.

DEux grandeurs ſont égales, lorſqu'elles ont même raiſon à une troiſiéme grandeur, ainſi il faut faire voir que ſi $a, f :: b, f$ que $a=b$.

Démonſtration.

Puiſque $a, f :: b, f$, il faut que a contienne autant de fois f que b contient de fois le même f; or ſi l'on ſuppoſe que $\frac{a}{f}$ donne q au quotient, $\frac{b}{f}$ donnera auſſi le même q, d'où l'on tirera $a=qf$, $b=qf$, ce qui fait voir que $a=b$, puiſque chacun eſt égal à la même quantité qf.

PROPOSITION VII.

LEs raiſons qui ſont égales à une troiſiéme, ſont égales entr'elles, c'eſt-à-dire que ſi $a, b :: g, f$ & $c, d :: g, f$ que $a, b :: c, d$.

Démonſtration.

Puiſque l'on ſuppoſe que $a, b :: g, f$;

a contiendra autant de fois b que g contient de fois f, & à cause que $c, d : : g, f$; c contiendra aussi autant de fois d que g contient de fois f; or le même nombre de fois que g contient f, a contient b; donc b est dans a autant de fois que d est dans c, par consequent $a, b : : c, d$.

PROPOSITION VIII.

Dans toutes proportions arithmetiques a, b, c, d, je dis que la somme $a+d$ des extrêmes est égal à $b+c$ qui est celle des moyens.

Démonstration.

Puisqu'il y a une proportion arithmetique dans les quatre grandeurs $a, b, : c, d$, il faut que a surpasse autant de fois b que c surpasse d; or supposons que a surpasse b de la grandeur g; c surpassera aussi a de la quantité g, ainsi on aura $b+g=a$ & $d+g=c$, présentement si l'on met dans la proportion à la place de a sa valeur $b+g$ & à la place de c sa valeur $d+g$, elle sera changée en son égale $b+g, b : d+g, d$, dans laquelle la somme des extrêmes $b+g+d=b+d+g$, qui est celle des moyens, puisque l'une & l'autre sont formées des mêmes grandeurs, donc $a+d=b+c$.

COROLLAIRE VI.

Il suit de-là, que l'on pourra toujours trouver à trois grandeurs a, b, & c une quatriéme proportionnelle arithmetique ; car si l'on suppose qu'elle soit x, l'on formera cette proportion $a, b : c, x$, dans laquelle la somme des extrêmes $a+x$ $=b+c$ des moyens, & si l'on ôte aux deux grandeurs $a+x$ & $b+c$ la même grandeur a, l'on trouvera d'une part $a+x$ $-a$ qui se réduit à x, & de l'autre $b+c$ $-a$, qui sont deux restes égaux, puisque de quantités égales on en a ôté la même, ainsi on aura $x=b+c-a$, qui fait voir que la quatriéme proportionnelle est égale à la somme des deux moyens, moins le premier terme. C'est pourquoi si l'on veut avoir aux grandeurs 5, 7 & 9 une quatriéme, il faut ajoûter les deux moyens 7 & 9, & de leur somme 16, en ôter le premier terme 5, le reste 11 sera ce que l'on cherche pour former la proportion 5, 7 : 9, 11.

La proportion arithmetique continuë $a, x : x, d$ donne $a+d=2x$, d'où il est aisé de voir que la moitié de $2x$ qui est x sera égal à la moitié de $a+d$ qui est $\frac{a+d}{2}$, ainsi on aura $x=\frac{a+d}{2}$, par conse-

quent la moyenne x d'une proportion continuë arithmetique, eſt toujours égale à la moitié de la ſomme des deux extrêmes.

Quand la proportion continuë arithmetique $\div a, b c$, s'étend à plus de trois grandeurs $\div a, b, c, d, g,$ &c. elle s'appelle *progreſſion* arithmetique.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

DAns toutes progreſſions arithmetiques, la ſomme de tous les termes eſt égale à celle du premier & du dernier terme multipliée par la moitié du nombre des termes; ainſi il faut prouver que la ſomme des termes d'une progreſſion quelconque $\div a, a+f, a+2f, a+3f, a+4f, a+5f$, eſt égale à la ſomme $a+a+5f$, des deux extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

Demonſtration.

Il eſt évident que la ſomme de tous les termes de la progreſſion arithmetique

$a, a+f, a+2f, a+3f, a+4f, a+5f,$ est égale à $a+a+f+a+2f+a+3f+a+4f+a+5f, =6a+15f$, or la somme $a+a+5f=2a+5f$, du premier & du dernier terme multipliée par la moitié du nombre des termes donne aussi $6a+15f$, donc pour avoir la somme des termes d'une progression arithmetique, il faut ajoûter le premier & le dernier terme, multiplier leur somme par la moitié du nombre des termes.

Il suit delà, que si l'on vouloit sçavoir combien une horloge frappe de coups depuis midi jusqu'à minuit, il faut faire attention que la progression arithmetique, commence par une heure & finit par douze ; car elle est $\div 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$, ainsi la somme du premier & du dernier terme est égal à 13, qui étant multiplié par 6, moitié du nombre des termes donne 78 pour la somme des termes, ou des coups que l'horloge a frappé.

DEFINITIONS.

1. Si l'on multiplie les antecedens de plusieurs raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{g}{f}$, &c. d'une

$\frac{a}{b}$, $\frac{b}{p}$ eſt $\frac{ab}{pb}$ qui eſt égal à $\frac{a}{p}$, puiſque les deux grandeurs *ab* & *pb* diviſées par la même *b*, ne changent point leur rapport, ainſi qu'on l'a vû Propoſition v. donc le rapport de la premiere grandeur à la troiſiéme, eſt compoſé du rapport de la premiere à la ſeconde, & de celui de la ſeconde à la troiſiéme.

COROLLAIRE. VII.

Il ſuit delà, que dans une proportion continue ∺ *a*, *c*, *d*, qui ſera par exemple formée de trois lignes, le rapport de la premiere *a* à la troiſiéme *d*, étant compoſé des rapports égaux $\frac{a}{c}$ & $\frac{c}{d}$ il ſera doublé de chacun, (définitions précedentes nombre 2.) ainſi $\frac{a}{d}$ ſera égal à $\frac{aa}{cc}$ d'où l'on tire *aa*, *cc*, :: *a*, *d*, ce qui fait voir que trois lignes étant en proportion continuë, le quarré fait ſur la premiere eſt au quarré fait ſur la ſeconde, comme la premiere ligne eſt à la troiſiéme.

On peut démontrer de cette maniere que trois lignes *a*, *c*, *d*, étant en proportion continuë; le quarré *aa* fait ſur la premiere ligne repréſentée par *a*, eſt au quarré

ré cc fait sur la seconde représentée par c, comme la premiere a est à la troisiéme d, c'est-à-dire que $aa, cc, :: a, d$; car puisque $a, c :: c, d$, on aura $ad = cc$, & la proportion $aa, cc :: a, d$, donne en multipliant les termes & les moyens $aad = acc$, puisqu'en mettant dans aad à la place de ad sa valeur cc, on a acc qui est la même chose que le produit des moyens; donc (Corollaire 1.) $aa, cc :: a, d$.

PROPOSITION XI.

THEOREME.

SI on a quatre grandeurs a, b, c, d, je dis que le rapport de la premiere a, à la quatriéme d, est composée des rapports de a à b, de b à c, & de c à d.

Démonstration.

Pour voir clairement que $\frac{a}{d}$ est composé des rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, il faut multiplier ces rapports afin d'avoir $\frac{abc}{bdc}$ pour leur rapport composé, qui se réduit en divisant par bc à son égal $\frac{a}{d}$, donc le

rapport de a à d eſt compoſé, &c.

COROLLAIRE VIII.

Il ſuit delà, que ſi les grandeurs a, b, c, d, étoient en proportion continuë $\div a, b, c, d$, que le rapport de a à d feroit compoſé de trois rapports égaux, & par conſequent triplé de chacun; car le rapport $\frac{a}{d} = \frac{abc}{bdc}$ & $\frac{abc}{bdc} = \frac{aaa}{bbb}$ (par la définition précedente nombre 3.) donc $\frac{a}{d} = \frac{aaa}{bbb}$, & par conſequent aaa Cube de la premiere grandeur, eſt à bbb Cube de la ſeconde, comme la premiere grandeur a, eſt à la quatriéme d.

On peut démontrer encore que $aaa, bbb :: a, d$, en faiſant voir que le produit des extrêmes $aaad$ eſt égal à celui des moyens $abbb$, pour y parvenir il faut faire attention, que puiſque les grandeurs a, b, c, d, ſont en proportion continuë, on aura $a, b :: b, c$, & $a, b :: c, d$, d'où l'on tire $ac = bb$ & $ad = bc$, préſentement ſi l'on met dans le produit des extrêmes $aaad$ à la place de ad ſa valeur bc, on aura ſon égal $aabc$, de même ſi on met dans le produit des moyens $abbb$ à la place de bb ſa valeur ac, on aura ſon égal $aabc$, qui

étant le même que celui des extrêmes, fait voir (Corollaire 1.) que aaa, bbb :: a, d.

PROPOSITION XII.

PROBLEME I.

On demande de trouver deux moyens proportionnels à deux nombres donnés.

Pour trouver deux moyens proportionels que nous nommerons m & n aux deux nombres 2 & 16, c'est-à-dire que les grandeurs m & n soient telles que l'on ait

$\div$ 2, m, n, 16, il faut se souvenir (Corollaire précedent) que le Cube de la premiere grandeur 2 qui est 8, est à mmm Cube de la seconde m, comme la premiere 2 est à la quatriéme 16; ainsi on aura cette proportion 8, mmm :: 2, 16, laquelle donne en multipliant les extrêmes & les moyens $128 = 2mmm$ qui étant l'un & l'autre, divisé par 2 donneront $64 = mmm$, d'où l'on voit que la racine Cube de mmm qui est m, sera égale à la racine Cube de 64 qui est 4, puisque les racines Cubes des quantités égales sont

égales ; présentement si l'on met à la place de m, dans la proportion $2, m :: n, 16$ sa valeur 4, elle sera changée en celle-ci $2, 4 :: n, 16$, dont les produits des extrêmes & des moyens fournissent $4n = 32$, lesquelles étant chacun divisés par 4, donneront $n = 8$ qui est le second des moyens proportionnels, qui restoit à trouver, pour former la proportion continuë

$\div 2, 4, 8, 16$.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME II.

TRois grandeurs étant en proportion continuë, connoissant la somme des deux extrêmes & la moyenne en particulier, connoître chacune des deux extrêmes.

Soit nommé $2a$, la somme connuë des deux extrêmes $2f$ leur difference, le plus grand des extrêmes sera égal à $a+f$ & le plus petit à $a-f$, puisque la difference de $a-f$ à $a+f$ se trouve égal à $2f$, ainsi qu'on l'a supposé, nous supposerons encore que la moyenne est égale à b, cela posé on aura cette proportion $a+f, b :: b, a-f$, d'où l'on tire en multipliant les

extrêmes & les moyens $aa-ff=bb$, qui se change en ôtant bb de part & d'autre en $aa-ff-bb=bb-bb$, & qui se réduit à $aa-ff-bb=o$, dans laquelle ajoûtant ff de part & d'autre du signe d'équalité, on aura $aa-ff-bb+ff=o+ff$, qui se réduit à $aa-bb=ff$, d'où il est clair que la racine quarrée de ff qui est f, est égale à la racine quarrée de $aa-bb$.

Pour appliquer ce que nous venons de dire à une exemple, nous supposerons que les sommes des deux extrêmes $2a=20$, & que la moyenne $b=8$, cela posé on aura $aa=100$, $bb=64$, & $aa-bb=100-64=36$, dont la racine quarrée est 6 pour la valeur de f, & comme les deux extrêmes sont $a+f$ & $a-f$, ils se trouveront connus en mettant à la place de a, & de f leur valeur 10 & 6; car le premier sera $10+6=16$, & le second $10-6=4$, ainsi la proportion est 4, 4. 8 :: 8. 16, où l'on voit que la somme des extrêmes fait 20, & que leur produit est le même que celui des moyens.



PROPOSITION XIV.

PROBLEME III.

TRois personnes ont gagné ensemble au jeu une somme d'argent, que nous nommerons a, la seconde personne a gagné le double de la premiere, moins une somme que nous appellerons c, & la troisiéme a gagné autant que les deux premieres, plus une somme que nous appellerons d; on demande d'exprimer par lettres la valeur de chacune.

Nous supposerons que le gain inconnu de la premiere soit nommé x, celui de la seconde sera égal à $2x-c$, puisqu'elle doit avoir le double de la premiere moins la quantité c, & le gain de la troisiéme, qui doit être égal aux gains de la premiere & de la seconde plus la quantité d, sera exprimé par $3x-c+d$, & comme le gain des trois personnes doit être égal à a, on aura $x+2x-c+3x-c+d=a$, qui se réduit à $6x-2c+d=a$, présentement si on ajoûte à chacune des quantités égales $6x-2c+d$, & a, la même grandeur $2c$, on aura $6x-2c+d+2c=a+2c$, puisqu'à des quantités égales on a ajoûté la même

laquelle se réduit à $6x+d=a+2c$, de même si on ôte dans cette derniere égalité la même quantité d, on trouvera $6x+d-d=a+2c-d$ qui se réduit à $6x=a+2c-d$, d'où l'on voit que la sixiéme partie de $6x$ qui est x sera égale à la sixiéme partie de $a+2c-d$, c'est à-dire en divisant par 6 on aura $x=\frac{a+2c-d}{6}$, qui est le gain de la premiere personne. Pour avoir celui de la seconde, il faut faire attention que parce qu'il doit être égal au double de celui de la premiere moins c, il sera égal à $\frac{a+2c-d}{6}+\frac{a+2c-d}{6}-c=\frac{2a-2c-2d}{6}$, & celui de la troisiéme qui vaut le gain des deux autres plus d, sera égal à $\frac{a+2c-d}{6}+\frac{2a-2c-2d}{6}+d=\frac{3a+3d}{6}$, ainsi l'on voit que le gain de la premiere personne

sera exprimé par . . . . $\frac{a+2c-d}{6}$

celui de la seconde par . . . . $\frac{2a-2c-2d}{6}$

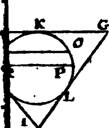
& celui de la troisiéme par . . $\frac{3a+3d}{6}$

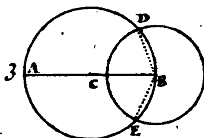
Pour faire l'application de la résolution que nous venons de faire, nous supposerons que $a=540$ livres, $c=12$, & $d=18$, présentement si l'on met dans le

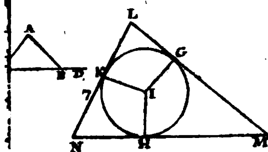
gain de la premiere perſonne $\frac{a+2c-d}{6}$, à la place des lettres leur valeur, on aura $\frac{a+2c-d}{6} = \frac{540+24-18}{6} = \frac{546}{6}$ & comme $\frac{546}{6}$ donne 91 au quotient, l'on voit que la premiere perſonne a gagné 91 livres; de même mettant dans $2a-2c-2d$ qui exprime le gain de la ſeconde perſonne, à la place des lettres leur valeur, on trouvera que $\frac{2a-2c-2d}{6} = \frac{1080-24-36}{6} = \frac{1020}{6}$, qui étant diviſé il viendra 170 pour le gain de la ſeconde perſonne, l'on trouvera auſſi en mettant dans $\frac{3a+3d}{6}$ leur valeur $\frac{1620+54}{6} = \frac{1674}{6}$ dont le quotient 279 donne le gain de la troiſiéme perſonne.

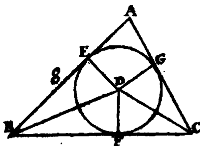
Il eſt aiſé de remarquer que telle valeur que puiſſent avoir les lettres a, b, c, l'on trouvera toujours le gain de chaque perſonne, en ſubſtituant dans l'expreſſion algebrique de chacune, à la place des lettres leur valeur, & en faiſant les operations arithmetiques indiquées par les ſignes.

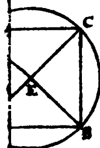
ivre quatrieme & cinquiême.

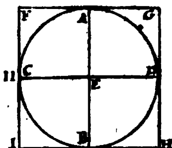


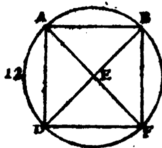


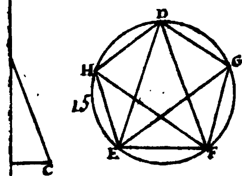


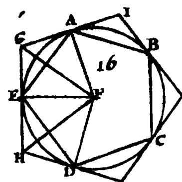


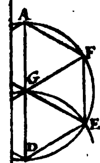


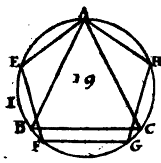


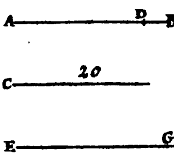


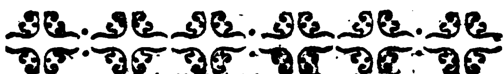












LIVRE SIXIE'ME DES ELEMENS D'EUCLIDE.

CE Livre commence à appliquer à des matieres particulieres la doctrine des proportions, que le Livre précedent n'explique qu'en géneral. Il commence par les figures les plus simples, c'est-à-dire, par les Triangles; donnant des regles, pour déterminer non seulement la proportion de leurs côtez, mais encore celle de leur capacité, aire ou surface. Ensuite il enseigne à trouver les lignes proportionnelles, & à augmenter ou diminuer quelque figure que ce soit, selon une raison donnée. Il démontre la regle de trois: il étend la quarante-septiéme du premier, à toutes sortes de figures. Enfin il nous donne des principes très-faciles & très-assurés pour nous conduire dans toute sorte de mesurages.

LES DEFINITIONS.

Pl. 1. Fig. 1. & 2. 1. LES figures rectilignes sont semblables lorsqu'elles ont tous les angles égaux; & les côtez qui forment ces angles proportionnels. *Comme les figures ABC, DEF seront semblables si les angles A & D; B & E, C & F sont égaux; & s'il y a même raison de AB à AC, que de DE à DF; & de AB à BC, que de DE à EF.*

Pl. 1. Fig. 3. & 4. 2. Les figures sont réciproques, quand on les peut comparer de telle sorte, que l'antecedent d'une raison, & le consequent de l'autre se trouvent dans la même figure: *C'est-à-dire, quand l'analogie commence dans une figure, & finit par la même. Comme s'il y avoit même raison de AB à CD, que de DE à BF.*

Pl. 1. Fig. 5. 3. Une ligne est divisée par l'extrême & moyenne raison, quand il y a même raison de toute la ligne à sa plus grande partie, que de sa plus grande partie à la plus petite. *Comme, s'il y avoit même raison de AB à AC, que de AC à CB; la ligne AB seroit divisée au point C par l'extreme & moyenne raison.*

4. La hauteur d'une figure, est la per-

pendiculaire tirée de ſon ſommet à ſa baſe. *Comme dans les Triangles ABC, EFG, les perpendiculaires EH, AD, ſoit qu'elles tombent dehors, ou qu'elles ſe tirent dans les Triangles ſont leurs hauteurs. Les Triangles & les parallelogrames, qui ont des hauteurs égales, peuvent être poſez entre les mêmes paralleles. Car ayant mis leurs baſes ſur la même ligne HC; ſi les perpendiculaires DA, HE ſont égales; les lignes EA, HC ſont paralleles.* Pl. 1. Fig. 6.

5. Une raiſon eſt compoſée de pluſieurs raiſons, quand les quantitez homologues de ces raiſons étant multipliées, en font une troiſiéme.

Il faut remarquer qu'une raiſon (au moins la rationnelle) a un nom tiré de quelque nombre qui marque quel rapport a l'antecedent de cette raiſon à ſon conſequent. Comme ſi on propoſe deux grandeurs, l'une de 12 pieds, & l'autre de 6, nous diſons que la raiſon de 12 à 6 eſt double. Pareillement, ſi on propoſe deux grandeurs 4 & 12, nous dirons que c'eſt une raiſon ſoûtriple; & $\frac{3}{3}$ un $\frac{1}{3}$ en eſt le dénominateur, qui marque qu'il y a même raiſon de 4 à 12, que de $\frac{1}{3}$ à un, ou comme 1 à 3. On peut appeller ce dénominateur la quantité de la raiſon. Qu'on propoſe donc trois termes 12, 6, 2. La premiere raiſon de 12

à 6 est double, son dénominateur est 2, la raison de 6, à 2 est triple, son dénominateur est 3, la raison de 12 à 2 est composée de la raison de 12 à 6, & de celle de 6 à 2. Ainsi pour avoir le dénominateur de la raison de 12 à 2 qui est composée de double & de triple, multipliez 3 par 2, & vous aurez 6; donc la raison de 12 à 2 est sextuple. C'est ce que les Mathematiciens entendent, par composition de raisons, quoiqu'on la devroit plutôt appeller multiplication de raisons.

PROPOSITION I.

THEOREME.

Les Parallelogrames & les Triangles de même hauteur, ont même raison que leurs bases.

Pl. 1. Fig. 7. QU'ON propose les Triangles AGC DEM de même hauteur, de sorte qu'on puisse les placer entre les paralleles AD, GM: Je dis qu'il y aura même raison de la base GC à la base EM, que du Triangle AGC, au Triangle DEM. Qu'on divise la base EM en autant de parties égales qu'on voudra, & qu'on tire par chaque division des lignes DF, DH, &c. Qu'on

divise aussi la ligne GC, en parties égales à celles de la ligne EM, & qu'on tire des lignes du sommet A à ces divisions : Tous ces petits Triangles, formés dans les deux grands, sont entre les mêmes paralleles, & ils ont des bases égales : ils sont donc égaux (par la 38 du 1.)

Démonstration.

La base GC, contient autant de parties aliquotes de la ligne EM, qu'on a pû trouver de parties égales à EF. Or autant qu'il y a dans la base GC de parties égales à EF ; autant le Triangle AGC contient de petits Triangles égaux à ceux qui sont dans le Triangle DEM ; lesquels étant égaux entr'eux, sont ses parties aliquotes : donc autant que la base GC contient de parties aliquotes de EM, autant le Triangle AGC contient de parties aliquotes du Triangle DEM ; ce qui arrivera dans toute sorte de division. Il y a donc même raison de la base GC à la base EM, que du Triangle AGC au Triangle DEM.

USAGE.

Non-seulement cette Proposition est nécessaire pour démontrer celles qui suivent ; mais on s'en peut servir pour diviser les champs. Pl. 1. Fig. 8.

Qu'on propose un trapeze ABCD, qui ait les côtez AD, BC paralleles, & qu'on

en veüille prendre la troisiéme partie, prenez CL égale à AD : & faites BG égale à la troisiéme partie de BL. Tirez AG. Je dis que le Triangle ABG est la troisiéme partie du trapeze ABCD.

Démonstration.

Les Triangles ADF, FCL, sont équiangle à cause des paralleles AD, CL, & ils ont les côtez AD, CL égaux : ils sont donc égaux (par la 26. du 1.) & par consequent le Triangle ABL est égal au trapeze : Or le Triangle ABG est la troisiéme partie du Triangle ABL par la précedente : Donc le Triangle ABG est le tiers du trapeze ABCD.

PROPOSITION II.

THEOREME.

Une ligne tirée dans un Triangle parallelement à sa base, divise ses côtez proportionnellement. Que si une ligne divise proportionnellement les côtez d'un Triangle, elle sera parallèle à sa base.

Pl. 1. Fig. 9. SI dans le Triangle ABC, la ligne DE est parallele à la base BC; les côtez AB, AC seront divisez proportionnelle-

ment, c'est-à-dire, qu'il y aura même raison de AD à DB, que de AE à EC. Tirez les lignes DC, BE. Les Triangles DBE, DEC, qui ont la même base DE, & qui sont renfermés entre les mêmes paralleles DE, BC sont égaux, (par la 37. du 1.)

Démonstration.

Les Triangles ADE, DBE, ont le même sommet E, prenant AD, DB pour leurs bases : & si on tiroit par le point E, une parallele à AB, ils seroient entre ces paralleles, & auroient par consequent même hauteur : ils ont donc même raison que leurs bases (par la 1.) c'est-à-dire qu'il y a même raison de AD à DB, que du Triangle ADE au Triangle DEB, ou à son égal CED. Or il y a aussi même raison du Triangle ADE au Triangle CDE, que de la base AE à EC. Il y a donc même raison de AD à DB, que AE à EC.

Que s'il y avoit même raison de AE à EC, que de AD à DB : Je dis que les lignes DE, BC seroient paralleles.

Démonstration.

Il y a même raison de AD à DB, que du Triangle ADE au Triangle DEB (par la 1.) il y a aussi même raison de AE à EC, que du Triangle ADE au Triangle DEC : par consequent il y aura même raison du Triangle ADE au Triangle BDE, que du

même Triangle ADE au Triangle CED: Ainsi (par la 1. du 5.) les Triangles BDE, CED sont égaux,&c. (par la 39. du 1.) ils sont entre les mêmes paralleles. Donc les lignes DE, BC sont paralleles.

USAGE.

Cette Proposition est absolument nécessaire pour les suivantes. Elle sert aussi pour démontrer la composition de raisons. Car puisque DB est à AD, comme EC est à AE, en composant il y aura aussi même raison de AB à AD, que de AC à AE, à cause des deux Triangles équiangles ABC, ADE, comme il sera démontré dans la quatriéme Proposition.

PROPOSITION III.

THEOREME.

La ligne qui partage en deux également l'angle d'un Triangle, partage sa base en deux parties qui sont en même raison que les cotez. Que si la ligne partage la base en deux parties proportionnelles aux côtez, elle divisera l'angle en deux également.

Pl. 1. Fig. 10. SI la ligne AD partage en deux également l'angle BAC; il y aura même

raiſon de AB à AC, que de BD à DC. Continuez le côté CA, & prenez AE égale à AB; puis tirez la ligne EB.

Démonſtration.

L'angle exterieur CAB, du Triangle iſoſcele ABE, eſt égal aux deux internes AEB, ABE: leſquels étant égaux (par la 5. du 1.) puiſque les côtez AE, AB ſont égaux, l'angle BAD, moitié de BAC ſera égal à l'un d'eux; c'eſt-à-dire, à l'angle ABE. Donc (par la 28. du 1.) les lignes AD, EB ſont paralleles: & (par la 2.) il y a même raiſon de EA, ou AB à AC, que de BD à DC.

Secondement, s'il y a même raiſon de AB à AC, que BD à DC, l'angle BAC ſera diviſé également en deux.

Démonſtration.

Il y a même raiſon de AB, ou EA à AC, que de BD à DC: Donc (par le 2. cas de la 2.) les lignes EB, AD ſont paralleles; & (par la 28. du 1.) les angles alternes EBA, BAD, l'interne BEA, & l'externe DAC, ſeront égaux, & les angles EBA, AEB étant égaux, les angles BAD, DAC, le ſeront auſſi. Donc l'angle BAC aura été diviſé également.

USAGE.

Nous nous ſervons de cette Propoſition pour avoir la proportion des côtez.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Les Triangles équiangles ont les côtez proportionnels.

Pl. 1. Fig. 11. SI les Triangles ABC, DCE sont équiangles; c'est-à-dire, que les angles ABC, DCE, BAC, CDE sont égaux : il y aura même raison de BA à BC, que de CD à CE. Pareillement la raison de AC à BC, sera la même que la raison de DE à CE, & la raison de BA à AC, sera la même que celle de CD à DE. Joignez les Triangles, de sorte que les bases BC, CE soient sur la même ligne; & continuez les côtez ED, BA : puisque les angles ACB, DEC sont égaux; les lignes AC, FE sont paralleles, de même que CD, BF (par 28. du 1.) & AFDC sera un parallelograme.

Démonstration.

Dans le Triangle BFE, AC est parallele à la base FE; donc (par la 2.) il y aura même raison de BA à AF ou CD, que de BC à CE : (& par échange) il y aura même raison de AB à BC, que de DC à CE. Pareillement dans le même

Triangle, CD étant parallele à la base BF, il y aura même raison de FD, ou AC à DE, que de BC à CE (par la 2.) & par échange, il y aura même raison de AC à BC, que de DE à CE. Enfin puisqu'il y a même raison de BA à BC, que de CD à CE, & même raison de BC à AC, que de CE à DE, il y aura (par égalité,) même raison de BA à AC, que de CD à DE.

Corollaire. Si dans un Triangle on tire une ligne parallele à un des côtez, on fera deux Triangles équiangles.

USAGE.

Cette Proposition est fort étenduë, & elle peut passer pour un principe très-universel dans toutes sortes de mesurages. Car premierement les pratiques ordinaires pour mesurer les lignes inaccessibles, en décrivant un petit Triangle semblable à celui qui est formé sur le terrain, sont établies sur cette Proposition, comme aussi la plûpart des instrumens, sur lesquels se forment des Triangles semblables à ceux que nous voulons mesurer, comme le quarré Géometrique, le Pantometre, l'Arbaleste, l'Instrument universel de M. Ozanam, & les autres. De plus, nous ne sçaurions lever le Plan d'une Place, que par cette Proposition : de sorte que pour en expliquer les

usages, il faudroit donner le premier Livre de la Géometrie Pratique.

PROPOSITION V.

THEOREME.

Les Triangles qui ont les côtez proportionnels sont équiangles.

Pl. 1. Fig. 12. & 13. SI les Triangles ABC, DEF ont les côtez proportionnels; c'est-à dire, s'il y a même raison de AB à BC, que de DE à EF: comme aussi si la raison de AB à AC, est la même que celle de DE à DF: les angles ABC, DEF, A & D, C & F seront égaux. Faites l'angle FEG égal à l'angle B, EFG égal à l'angle C.

Démonstration.

Les Triangles ABC, EFG, ont deux angles égaux: ils sont donc équiangles (par le Corol. 2. de la 32. du 1.) & (par la 4.) il y aura même raison de AB à BC, que de GE à EF. Or on suppose qu'il y a même raison de DE à EF, que de AB à BC: ainsi il a même raison de DE à EF, que de EG à EF. Donc (par la 1. du 5.) DE, EG sont égales. Pareillement DF, FG le sont aussi, & (par la

8. du 1.) les Triangles DEF, GEF sont équiangles. Or l'angle GEF a été fait égal à l'angle B : donc l'angle DEF, est égal à l'angle B ; & l'angle DFE à l'angle C. Ainsi les Triangles ABC, DEF sont équiangles.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Les Triangles qui ont les côtez proportionnels, autour d'un angle égal sont équiangles.

SI les angles B & E des Triangles ABC, DEF, sont égaux, & s'il y a même raison de AB à BC, que de ED à EF ; les Triangles ABC, DEF seront équiangles. Faites l'angle FEG égal à l'angle B, & l'angle EFG égal à langle C. Pl. 1. Fig. 12. & 13.

Démonstration.

Les Triangles ABC, EGF sont équiangles (par le Corol. 2. de la 32. du 1.) il y a donc même raison de AB à BC, que de EG à EF (par la 4.) Or comme AB est à BC, ainsi DE à EF : il y a donc même raison de DE à EF, que de GE à EF. Ainsi (par la 1. du 5.) DE, EG sont égales : & les Triangles DEF, GEF, qui ont les angles DEF, GEF, chacun égal à l'angle

B, & les côtez DE, EG égaux avec le côté EF commun, seront égaux en tous sens (par la 4. du 1.) ils seront donc équiangles : & le Triangle EGF, étant équiangles à ABC; les Triangles ABC, DEF sont équiangles.

La Proposition 7. est inutile.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

La perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un Triangle rectangle, au côté qui lui est opposé, le divise en deux Triangles qui lui sont semblables.

Pl. 1. Fig. 14. SI de l'angle droit ABC, on tire une perpendiculaire BD, au côté opposé AC; elle divisera le Triangle rectangle ABC, en deux Triangles ADB, BDC, qui seront semblables ou équiangles au Triangle ABC.

Démonstration.

Les Triangles ABC, ADB ont le même angle A : les angles ADB, ABC sont droits : ils sont donc équiangles (par le Corol. 2. de la 32. du 1.) Pareillement les Triangles BDC, ABC, ont l'angle C commun : & les angles ABC, BDC étant droits, sont aussi égaux. Donc les Trian-

gles ABC, DBC sont semblables.

USAGE.

Nous mesurons les distances inaccessibles par l'équiere suivant cette Proposition. Par exemple, s'il faut mesurer la distance DC; ayant tiré la perpendiculaire DB, & ayant mis un équiére au point B, de sorte que regardant par un de ses côtez BC, je voye le point C, & par son autre côté, le point A: il est évident qu'il y aura même raison de AD à DB, que de DB à DC. Ainsi multipliant DB par soi-même, & divisant le produit par AD, le quotient sera DC.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit que le côté AB est moyen proportionnel entre la base AC, & le segment AD, & que pareillement le côté BC est moyen proportionnel entre la même base AC, & le segment correspondant CD. Par où l'on démontrera facilement la 47. Prop. du 1. L. Car si l'on met la lettre b, pour la base AC, la lettre c, pour le côté AB, & la lettre d, pour l'autre côté BC, l'on aura $\frac{cc}{b}$ *pour le segment AD, &* $\frac{dd}{b}$ *pour l'autre segment CD, & par consequent* $\frac{cc+dd}{b}$ *pour la base AC, ou pour b. Ainsi l'on aura cette équation,* $\frac{cc+dd}{b} = b$, *ou*

$cc + dd = bb$, par où l'on voit que le quarré de la base AC, est égal à la somme de quarrez des deux côtez AB, BC.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

Couper la partie qu'on voudra d'une ligne.

Pl. 1. Fig. 15. QU'ON propose la ligne AB, de laquelle on veut avoir les trois cinquiémes. Faites l'angle ECD à discretion; prenez dans une de ses lignes CD, cinq parties égales à discretion; & que CF en contienne trois, & que CE soit égale à AB. Tirez ensuite la ligne DE, puis FG parallele à DE : la ligne CG contiendra trois cinquiémes parties de CE, ou AB.

Démonstration.

Dans le Triangle ECD, FG étant parallele à la base DE, il y aura même raison de CF à FD, que de CG à GE (par la 2.) & en composant, il y aura même raison de CG à CE, que de CF à CD. Or CF contient trois cinquiémes de CD: Donc CG contiendra trois cinquiémes de CE, ou AB.

PRO-

PROPOSITION X.

PROBLEME.

Diviser une ligne de même façon qu'une autre ligne est divisée.

SI on veut diviser la ligne AB, de même façon que la ligne AC est divisée. Pl. 1. Fig. 16. Joignez ces deux lignes à quelque angle qu'il vous plaira, comme CAB : Tirez la ligne BC, & les paralleles HX, GT, & les autres. La ligne AB sera divisée de même façon que AC.

Démonstration.

Puisque dans le Triangle BAC, on a tiré HX & les autres lignes paralleles à la base BC; elles diviseront proportionnellement les côtez AB, AC, (par la 2.) Donc la ligne AB sera divisée de la même façon que AC.

Pour le faire facilement, on peut tirer BD parallele à AC, & transporter les mêmes divisions de AC sur BD : puis tirer les lignes de l'un à l'autre, elles couperont AB dans des points qui la diviseront de même que AC.

cc+dd = bb, par où r ... ré de la base AC ... quarrez des d ...

... TION XI.

... OBLEME.

PR ... *troisiéme proportionnelle à ... deux lignes données.*

Co ... cherche une troisiéme proportionnelle aux lignes AB, BC; c'est-à-dire, qu'il y ait même raison de AB, à BC, que de BC à la ligne que vous cherchez. Prenez de suite les lignes AB, BC, en sorte qu'elles fassent une ligne droite. Faites à discretion l'angle EAC: & que AD soit égale à BC: tirez la ligne BD, & sa parallele CE. La ligne DE sera celle que vous cherchez.

Pl. 1. Fig. 15

Demonstration.

Dans le Triangle EAC, la ligne DB est parallele à la base CE: Il y a donc (par la 2.) même raison de AB à BC, que de AD, ou BC à DE.

SCOLIE.

On trouve dans le Traité du Compas de Proportion de Monsieur Ozanam, une Méthode très-courte pour trouver à deux lignes données une troisiéme proportionnelle.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

Trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes données.

QU'ON propose trois lignes AB, BC, DE, ausquelles il faut trouver une quatriéme proportionnelle. Faites un angle FAC à discretion : prenez sur AC, les lignes AB, BC ; & sur FA, la ligne AD, égale à DE ; tirez ensuite la ligne DB, & sa parallele FC. Je dis que DF, est la ligne que vous cherchez ; c'est-à-dire, qu'il y a même raison de AB à BC, que de DE ou AD à DF. Pl. 1. Fig. 19. & 20.

Démonstration.

Dans le Triangle FAC, la ligne DB, est parallele à la base FC, il y a donc même raison de AB à BC, que de AD à DF, (par la 2.)

USAGE.

L'usage du Compas de proportion est établie sur ces quatre Propositions ; car nous divisons une ligne, comme il nous plaît, par le Compas de proportion : nous faisons des regles de trois, sans nous servir de l'Arithmetique : nous tirons la racine quarrée & ou-

bique : nous doublons le cube : nous mesurons toute sorte de Triangles : nous trouvons la capacité des surfaces & la solidité des corps : nous augmentons ou diminuons quelque figure que ce soit, selon la proportion qu'il nous plaît : & tous ces usages se démontrent par les Propositions précedentes.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

Trouver une moyenne proportionnelle, entre deux lignes données.

Pl. 1. Fig. 21. SI vous voulez une moyenne proportionnelle entre les lignes LV, VR : les ayant jointes sur une ligne droite, divisez la ligne LR, en deux également au point M ; & ayant décrit un demi-Cercle LTR du centre M ; tirez la perpendiculaire VT. Elle sera moyenne proportionnelle entre LV, VR. Tirez les lignes LT, TR.

Démonstration.

L'angle LTR, décrit dans un demi-Cercle, est droit (par la 31. du 3.) & (par la 8.) les Triangles LVT, TVR sont semblables : il y a donc même raison dans le Triangle LVT, de LV à VT, que de VT à VR dans le Triangle TVR,

(par la 4.) Ainsi VT est moyenne proportionnelle entre LV & VR.

USAGE.

Nous réduisons au quarré, quelque parallelograme rectangle que ce soit, par cette Proposition. Par exemple, le rectangle compris sous LV, VR, que je démontrerai ci-après (dans la Prop. 17.) être égal au quarré de VT.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

Les Parallelogrames équiangles & égaux ont les côtez réciproques, & les parallelogrames équiangles, & ceux qui ont les côtez réciproques, sont égaux.

SI les parallelogrames L & M sont équiangles & égaux, ils auront les côtez réciproques: c'est-à-dire, qu'il y aura même raison de CD à DE, que de FD à BD. Car puisqu'ils ont les angles égaux, on les pourra joindre de telle sorte, que leurs côtez CD, DE soient sur une ligne droite (par la 15. du 1.) Continuez les côtez AB, GE; vous acheverez le parallelograme BDEH. Pl. 12. Fig. 22.

Démonstration.

Puisque les parallelogrames L & M sont égaux, ils auront même raison au parallelograme BDEH : Or la raison du parallelograme L au Parallelograme BDEH, est la même que la base CD à la base DE (par la 1.) & celle du parallelograme M, ou DFGE, au parallelograme BDEH, est la même que de la base FD à la base BD. Donc il y a même raison de CD à DE, que de FD à BD.

Secondement. Si les parallelogrames équiangles L & M, ont leurs côtez réciproques, ils seront égaux.

Démonstration.

Les côtez des parallelogrames sont réciproques ; c'est-à-dire, qu'il y a même raison de CD à DE, que de FD à DB : or comme la base CD à DE, ainsi le parallelograme L est au parallelograme BDEH (par la 1.) & comme FD est à BD : ainsi le parallelograme est à BDEH ; il y a donc même raison de L à BDEH, que de M au même BDEH. Ainsi (par la 1. du 5.) les parallelogrames L & M sont égaux.

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la regle de trois inverse. Car si l'on disoit, par exemple, si la longueur CD donne BD pour la largeur, combien donnera

la longueur DF? elle doit donner la largeur DE, que l'on trouvera en multipliant ensemble les deux premiers termes CD, BD, pour avoir l'aire du Parallelograme ABCD égal au parallelograme DEGF, & en divisant cette aire par le troisiéme terme DF.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

Les Triangles égaux, & qui ont un angle égal, ont les côtez qui forment cet angle, réciproques: Et s'ils ont les côtez réciproques, ils seront égaux.

SI les Triangles F & G étant égaux, ont les angles ACB, ECD égaux; leurs côtez autour de cet angle seront réciproques; c'est-à-dire, qu'il y aura même raison de BC à CE, que de CD à CA. Disposez tellement ces Triangles, que les côtez DC, CA soient une ligne droite: puisque les angles ACB, ECD sont supposez égaux, les lignes BC, CE feront aussi une ligne droite, (par la 15. du 1.) Tirez la ligne AE. Pl. 15 Fig. 234

Démonstration.

Il y a même raison du Triangle ABC, au Triangle ACE, que du Triangle ECD,

égal au premier, au même Triangle ACE, (par la 1. du 5.) Or comme ABC est à ACE, ainsi la base BC est à la base CE, (par la 1.) puisqu'ils ont le même sommet A: & comme ECD est à ACE, ainsi la base CD est à CA, (par la même.) Il y a donc même raison de BC à CE que de CD à CA..

Que si on suppose que les côtez sont réciproques; c'est-à-dire, qu'il y ait même raison de BC à CE; que de CD à CA: les Triangles ABC, CDE seront égaux, parce qu'ils auront même raison au Triangle ACE.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

Si quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle compris sous la premiere & la quatriéme, est égal au rectangle compris sous la seconde & la troisiéme. Que si le rectangle compris sous les extrêmes, est égal au rectangle compris sous celles du milieu, les quatre lignes sont proportionnelles.

Pl. 2. Fig. 24. SI les lignes A, B, C, D, sont proportionnelles; c'est-à-dire, s'il y a même raison de A à B, que de C à D, le rectangle

gle compris ſous la premiere A, & la quatriéme D, ſera égal au rectangle compris ſous B & C.

Démonſtration.

Les rectangles ont l'angle égal, puiſqu'il eſt droit; ils ont auſſi les côtez réciproques: ils ſont donc égaux (par la 14.)

Pareillement, s'ils ſont égaux ils auront les côtez réciproques; c'eſt-à-dire, il y aura même raiſon de A à B, que C à D.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

Si trois lignes ſont proportionnelles, le rectangle compris ſous la premiere & la derniere, eſt égal au quarré de celle du milieu. Que ſi le quarré de celle du milieu, eſt égal au rectangle des extrêmes: les trois lignes ſont proportionnelles.

SI les trois lignes A, B, D ſont proportionnelles; le rectangle compris ſous A & ſous D, ſera égal au quarré de B. Prolongez la ligne D, & prenez C égale à B, il y aura même raiſon de A à B, que de C à D: donc les quatre lignes Pl. 1. Fig. 24.

A, B, C, D sont proportionnelles.

Démonstration.

Le rectangle sous A & sous D, sera égal au rectangle sous B & sous C (par la précedente.) Or ce dernier rectangle est un quarré, puisque les lignes B & C sont égales : donc le rectangle compris sous A & sous D, est égal au quarré de B.

Pareillement, si le rectangle sous A & D, est égal au quarré de B ; il y aura même raison de A à B, que de C à D : & puisque B & C sont égales, il y aura même raison de A à B, que de B à D.

USAGE.

Ces quatre Propositions démontrent la regle d'Arithmetique, que nous appellons communément la regle de trois, & par conséquent les regles de societé, de faux, & toutes les autres qui se font par proportion. Par exemple, qu'on propose les trois nombres A, 8, B 6, C, 4, il s'agit de chercher le quatriéme nombre proportionnel. Supposez qu'on l'ait trouvé, & que ce soit D. Le rectangle compris sous A & D, est égal au rectangle compris sous B & C (par la 16.) Or je puis avoir ce rectangle, multipliant B par C ; c'est-à-dire 6 par 4, & j'aurai 24 : donc le rectangle compris sous A & D, est 24. C'est pourquoi le divisant par

A, 8, le quotient sera 3, qui est le nombre que je cherche.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

Décrire un Polygone semblable à un autre, sur une ligne donnée.

ON propose la ligne AB, sur laquelle on veut décrire un polygone semblable au polygone CFDE. Ayant divisé le polygone CFDE en Triangles, faites sur la ligne AB, un Triangle ABH, semblable au Triangle CFE; c'est-à-dire, faites l'angle ABH égal à l'angle CFE; & BAH égal à FCE. Ainsi les Triangles ABH, CFE seront équiangles (par la 32. du 1.) Faites aussi sur BH un Triangle équiangle à FDE. Pl. 2. Fig 26. & 27.

Démonstration.

Puisque les Triangles qui sont parties des polygones, sont équiangles, les deux polygones sont équiangles. De plus, puisque les Triangles ABH, CFE sont équiangles; il y aura même raison de AB à BH, que de CF à FE (par la 4.) Pareillement, les Triangles HBG, EFD

étant équiangles; il y aura même raison de BH à BG, que de FE à FD: & par égalité, il y aura même raison de AB à BG, que de CF à FD. Et ainsi de tous les autres côtez. Donc (par la défin. 1.) les polygones sont semblables.

USAGE.

C'est sur cette Proposition que nous établissons la plûpart des Pratiques pour lever le Plan d'une Place, d'un Bâtiment, d'un Champ, d'une Forest, & même de tout un Païs: car faisant valoir les parties d'une ligne divisée également, pour des pieds, ou pour des toises; nous décrivons une figure semblable au prototype, mais plus petite, dans laquelle nous pouvons voir la proportion de toutes ces lignes. Et parce qu'il nous est plus facile de travailler sur le papier que sur le terrain; nous pouvons renfermer dans cette Proposition presque toute la Geodesie, toutes les Chorographies, toutes les Cartes de Géographie, la façon de réduire de grand en petit; de sorte que cette Proposition s'étend presque par tous les Arts, qui ont besoin d'avoir le dessein, ou le modele de leurs Ouvrages.

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

Les Triangles semblables; c'est-à-dire équiangles, sont en raison doublée, de celle de leurs côtez homologues.

SI les Triangles ABC, DEF sont semblables, ou équiangles; ils seront en raison doublée des côtez homologues BC, EF; c'est-à-dire, que la raison du Triangle ABC au Triangle DEF sera doublée de la raison de BC à EF: de sorte que cherchant la troisiéme proportionnelle HI aux lignes BC, EF; en faisant qu'il y ait même raison de BC à EF, que de EF à HI; le Triangle ABC aura même raison au Triangle DEF, que la ligne BC à la ligne HI. Ce qui s'appelle avoir une raison doublée. Que BG & HI soient égales; & qu'on tire la ligne AG. Pl. 2. Fig. 28. & 29.

Démonstration.

Les angles B & E des Triangles ABG, DEF sont égaux: d'ailleurs, puisque les Triangles ABC, DEF sont semblables, il y aura même raison (par la 4.) de AB à DE, que de BC à EF: Or comme BC

est à EF, ainsi EF est à HI, ou BG, donc comme AB est à DE, ainsi EF est à BG : & par consequent les côtez des Triangles ABG, DEF étant réciproques : les Triangles seront égaux (par la 15.) Or (par la 1.) le Triangle ABC a même raison au Triangle ABG, que BC à BG, ou HI : donc le Triangle ABC a même raison au Triangle DEF, que BC à HI.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que les Triangles semblables sont dans la raison des quarrez de leurs côtez homologues, parce que ces quarrez sont aussi en raison doublée de celle de leurs côtez.

USAGE.

Ces Propositions corrigent l'opinion de plusieurs, qui s'imaginent facilement que les figures semblables sont en même raison que leurs côtez. Par exemple, qu'on propose deux quarrez, deux pentagones, deux hexagones, deux cercles ; & que le côté du premier soit double de celui du second ; la premiere figure sera quadruple de la seconde. Si le côté de la premiere, est triple de celui de la seconde, la premiere figure sera neuf fois aussi grande que la seconde. Ainsi pour faire un quarré triple de l'autre, il faudroit chercher une moyenne proportion-

nelle entre un & trois, qui seroit presque $1\frac{2}{3}$ pour le côté de la figure triple.

PROPOSIITON XX.

THEOREME.

Les polygones semblables se peuvent diviser en autant de Triangles semblables; & leurs superficies sont en raison doublée de leurs côtez homologues.

SI les polygones ABGDE, GHILM sont semblables; on les pourra diviser en autant de Triangles semblables, & qui seront des semblables parties de leur tout. Tirez les lignes AC, AD, GI, GL. Pl. 2. Fig. 30. & 31.

Démonstration.

Puisque les polygones sont semblables, leurs angles B & H seront égaux; & il y aura même raison de AB à BC, que de GH à HI (par la 1. défin.) donc les Triangles ABC, GHI sont semblables (par la 6.) & (par la 4.) il y aura même raison de BC à CA, que de HI à GI. De plus, puisqu'il y a même raison de CD à BC, que de IL à IH, & la même de BC à CA, que de HI à GI: il y aura par égalité, même raison de CD à CA, que de IL à GI. Or les angles BCD & HIL étant égaux, si vous en ôtez les angles égaux ACB, GIH; les angles

ACD, GIL feront égaux. Donc les Triangles ACD, GIL feront femblables (par la 6.) Ainfi il eft facile de parcourir tous les Triangles des polygones, & de prouver qu'ils font femblables.

J'ajoûte que les polygones font en raifon doublée de leurs côtez homologues.

Démonftration.

Chaque Triangle eft à fon femblable en raifon doublée des côtez homologues (par la 19.) Donc chaque Triangle d'un polygone à chaque Triangle de l'autre, eft en raifon doublée des côtez homologues, & leurs côtez ayant même raifon (par la 4.) puifque tous les Triangles font femblables, la raifon doublée fera la même; & de plus, il y a même raifon de chaque Triangle à fon femblable, que de tous les Triangles d'un polygone à tous ceux de l'autre (par la 3. du 5.) c'eft-à-dire d'un polygone à l'autre. Donc les Triangles font en même raifon que les polygones : & puifque les Triangles font en raifon doublée de leurs côtez homologues, les polygones le feront auffi.

Coroll. 1. Les polygones femblables font comme les quarrez de leurs côtez homologues.

Coroll. 2. Si trois lignes font continuellement proportionnelles, le polygo-

ne décrit ſur la premiere, aura même raiſon au polygone décrit ſur la ſeconde, que la premiere à la troiſiéme; c'eſt-à-dire, en raiſon doublée de celle de la premiere ligne, à la ſeconde.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

Les polygones qui ſont ſemblables à un troiſiéme polygone, le ſont auſſi entr'eux.

SI deux polygones ſont ſemblables à un troiſiéme, ils ſeront ſemblables entre eux; car ils ſe pourront chacun diviſer en autant de Triangles ſemblables qu'il y en a dans le troiſiéme. Or les Triangles ſemblables à un troiſiéme, le ſont auſſi entr'eux, parce que les angles qui ſont égaux à un troiſiéme, ſont égaux entr'eux; & les angles des Triangles étant égaux, ceux des polygones qui en ſont compoſez, le ſont auſſi. Pl. 2. Fig. 32. 33. & 34.

J'ajoûte que ſi les côtez des Triangles ſont en même raiſon, ceux des polygones le ſeront auſſi, puiſque ce ſont les mêmes. Donc les polygones qui ſont ſemblables à un troiſiéme polygone, ont les angles égaux, & les côtez proportionnels.

C'eſt pourquoi (par la défin. 1.) ils ſont ſemblables entr'eux.

PROPOSITION XXII.

THEOREME.

Les Poligones ſemblables décrits ſur quatre lignes proportionnelles, ſont auſſi proportionnels. Et ſi les polygones ſont en même raiſon, les lignes le ſeront auſſi.

Pl. 2. Fig. 35. 36. 37. 38. & 39. S'IL y a même raiſon de BC à EF, que de HT à MN; il y aura auſſi même raiſon du polygone ABC au polygone ſemblable DEF, que du polygone HL au polygone ſemblable MO. Cherchez aux lignes BC, EF, une troiſiéme proportionnelle G; & aux lignes HT, MN, la troiſiéme proportionnelle P (par la 1.) Puiſqu'il y a même raiſon de BC à EF, que de HT à MN; & de EF à G, que de MN à P: il y aura par égalité même raiſon de BC à G, que de HT à P: cette raiſon ſera doublée de celle de BC à EF, ou HT à MN.

Démonſtration.

Le polygone ABC au polygone DEF, eſt en raiſon doublée de celle de BC à EF (par la 20.) c'eſt-à-dire, comme BC eſt

à G ; & le polygone HL, à MO a même raiſonque HT à P. Il y a donc même raiſon de ABC à DEF, que de HL à MO.

Que ſi les polygones ſemblables ſont proportionnels ; les lignes étant en raiſon ſoûdoublée, ſeront proportionnelles.

USAGE.

A,	B,	C,	D.
3,	2,	6,	4.
9,	4,	36,	16.
E,	F,	G,	H.

Cette Propoſition ſe peut facilement appliquer aux nombres. Si les nombres A, B, C, D, ſont proportionnels, leurs quarrez E, F, G, H, le ſeront auſſi : ce qui nous ſert dans l'Arithmetique, & encore plus dans l'Algebre.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

Les parallelogrames équiangles, ſont en raiſon compoſée de celles de leurs côtez.

SI les parallelogrames L & M ſont équiangles ; la raiſon de L à M, ſera compoſée de celle de AB à DE, & de celle de BD à DF. Joignez les parallelogrames, de ſorte que leurs côtez BD, DF ſoient ſur une ligne droite, auſſi bien que CD, DE ; ce qui ſe peut, s'ils ſont équian- Pl. I. Fig. 22.

gles. Achevez le parallelograme BDEH.

Démonstration.

Le parallelograme L, a même raiſon au parallelograme BDEH, que la baſe AB à la baſe BH ou DE (par la 1.) le parallelograme BDEH a même raiſon au parallelograme DFGE, c'eſt-à-dire M, que la baſe BD à la baſe DF. Or la raiſon du parallelograme L, au parallelograme M, eſt composée de celle de L au parallelograme EDEH, & de celle de BDEH, au parallelograme M. Donc la raiſon de L à M, eſt composée de celle de AB à DE, & de celle de BD à EG, ou DF.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

Dans toute ſorte de parallelograme, ceux par leſquels la diagonale paſſe, ſont ſemblables au grand.

Pl. 2. Fig. 40. QUE la diagonale du parallelograme AC, paſſe par les parallelogrames EF, GH : Je dis qu'ils ſont ſemblables au parallelograme AC.

Démonſtration.

Les parallelogrames AC, EF ont le

même angle B: & parce que dans le Triangle BCD, IF est parallele à la base DC, les Triangles BFI, BCD sont équiangles. Il y a donc (par la 4.) même raison de BC à CD, que de BF à FI: & par consequent les côtez sont en même raison. Pareillement, IH étant parallele à BC; il y aura même raison de DH à HI, que de DC à BC; les angles sont aussi égaux, tous les côtez étant paralleles: Donc (par la défin. 1.) les parallelogrames EF, GH sont semblables au parallelograme AC.

USAGE.

Je me suis servi de cette Proposition dans la Proposition 10. du dernier Livre de la Perspective, pour montrer qu'on traçoit une image semblable à l'original, par le parallelograme composé de quatre regles.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

Décrire un polygone semblable à un polygone donné, & égal à un autre.

SI vous voulez décrire un polygone égal au rectiligne A, & semblable au polygone B; Faites un parallelograme CE Pl. 2. Fig. 41. & 42.

égal au polygone B, (par la 45. du 1.) & sur DE; faites un parallelograme EF égal au rectiligne A, (par la 45. du 1.) Cherchez ensuite une moyenne proportionnelle GH, entre CD & DF (par la 13.) Faites enfin sur GH, un polygone O, semblable à B (par la 18.) il sera égal au rectiligne A.

Démonstration.

Puisque CD, GH, DF sont continuellement proportionnelles; le rectiligne B décrit sur la premiere, sera au rectiligne O décrit sur la seconde, comme CD à DF, (par le Corol. 2. de la 20.) Or comme CD est à DF, ainsi le parallelograme CE est à EF, ou B à A, puisqu'ils sont égaux. Il y a donc même raison de B à O, que de B à A. Ainsi (par la 1. du 5.) A & O sont égaux.

USAGE.

Cette Proposition contient un changement de figure gardant toûjours l'égalité; ce qui est très-utile, principalement dans la Géometrie pratique pour réduire les figures au quarré.

Ce Problême se trouve résolu beaucoup plus facilement & indépendamment de la 45. *Prop. du* L. 1.er *dans l'Euclide de Monsieur Ozanam.*

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

Si dans un parallelograme, on en décrit un plus petit, qui lui ſoit ſemblable, & qu'il y ait un angle commun à tous les deux; la diagonale du grand rencontrera l'angle du petit.

SI dans le parallelograme AC, on en décrit un autre plus petit DG, qui lui ſoit ſemblable, & que l'angle D ſoit commun: La diagonale DB, paſſera par le point G. Car ſi elle n'y paſſoit pas, mais qu'elle paſſât par I, ainſi que fait la ligne BID, tirez la ligne IE, parallele à HD. Pl. 2. Fig. 43.

Demonſtration.

Le parallelograme DI, eſt ſemblable au parallelograme AC (par la 24.) Or on ſuppoſe que le parallelograme DG, lui eſt auſſi ſemblable: donc les parallelogrames DI, DG feroient ſemblables; ce qui eſt impoſſible: autrement il y auroit même raiſon de HI à IE, ou FG, que de HG à GF: & (par la 1. du 5.) les lignes HI, HG feroient égales.

Les Propoſitions vingt-ſept, vingt-huit, & vingt-neuf ſont inutiles.

PROPOSITION XXX.

THEOREME.

Couper une ligne selon l'extrême, & moyenne raison.

Pl. 2. Fig. 44. ON propose la ligne AB, à diviser selon l'extrême, & moyenne raison; c'est-à-dire, de sorte qu'il y ait même raison de AB à AC, que de AC à CB. Divisez la ligne AB (par la 11. du 2.) de sorte que le rectangle compris sous AB, CB, soit égal au quarré de AC.

Démonstration

Puisque le rectangle sous AB, BC, est égal au quarré de AC, il y aura même raison de AB à AC, que de AC à BC (par la 17.)

USAGE.

Cette Proposition est nécessaire au treiziéme Livre d'Euclide, pour trouver le côté des cinq corps réguliers. Le Frere Lucas de S. Sepulchre a composé un Livre des proprietez d'une ligne coupée selon l'extrême & moyenne raison.

PRO-

PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

Un polygone décrit sur la base d'un Triangle rectangle, est égal aux deux polygones semblables, décrits sur les côtez du même Triangle.

SI le Triangle ABC a un angle droit BAC; le polygone D, décrit sur la base BC, est égal aux polygones semblables F & E, décrits sur les côtez AB, AC. Pl. 2. Fig. 45.

Démonstration.

Les polygones D, E, F, sont entr'eux en raison doublée de celle de leurs côtez homologues BC, AB, AC (par la 20.) Si on décrivoit des quarrez sur ces mêmes côtez, ils seroient aussi entr'eux en raison doublée de leurs côtez. Or (par la 47. du 1.) le quarré de BC seroit égal aux quarrez de AC, AB: Donc le polygone D décrit sur BC, est égal aux polygones semblables E & F, décrits sur AB, AC.

USAGE.

On se sert de cette Proposition pour aggrandir ou diminuer toutes sortes de figures: car elle est plus universelle que la 47.

du 1. laquelle néanmoins est si utile, qu'il semble que presque toute la Geometrie soit établie sur ce principe.

La 32. Proposition est inutile.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

Dans les Cercles égaux, les angles tant du centre que de la circonference, comme aussi les secteurs, sont en même raison que les arcs, qui leur servent de base.

Pl. 2. Fig. 46. & 47. SI les Cercles ANC, DOF sont égaux: il y aura même raison de l'angle ABC, à l'angle DEF, que de l'arc AC à l'arc DF. Que AG, GH, HC soient des arcs égaux, & par consequent des parties aliquotes de l'arc AC; & qu'on divise l'arc DF, en autant de parties égales à HG, qu'on y en pourra rencontrer: & qu'on tire les lignes EI, EK, & les autres.

Démonstration.

Tous les angles ABG, GBH, HBC, DEI, IEK, & les autres sont égaux (par la 27. du 3.) ainsi AG, partie aliquote de l'arc AC, se rencontre dans l'arc DF, autant de fois que l'angle ABG, partie

aliquote de l'angle ABC, se rencontre dans l'angle DEF : il y a donc même raison de l'arc AC à l'arc DF, que de l'angle ABC à l'angle DEF.

Et parce que les angles N & O sont les moitiez des angles ABC, DEF, ils seront en même raison qu'eux : il y aura donc même raison de l'angle N à l'angle O, que de l'arc AC à l'arc DF.

Il en est de même des secteurs : car si on tiroit des lignes AG, GH, HC, DI, IK, & les autres; elles seroient égales (par la 28 du 3.) & on diviseroit chaque petit secteur en un Triangle, & un segment. Les Triangles seroient égaux (par la 8. du 1.) & les petits segmens seroient aussi égaux (par la 24. du 3.) Donc tous les petits secteurs seroient égaux : & ainsi autant que l'arc DF contient de parties aliquotes de l'arc AC, autant le secteur DEF contiendra de parties aliquotes du secteur ABC. Il y a donc même raison de l'arc à l'arc, que du secteur au secteur.

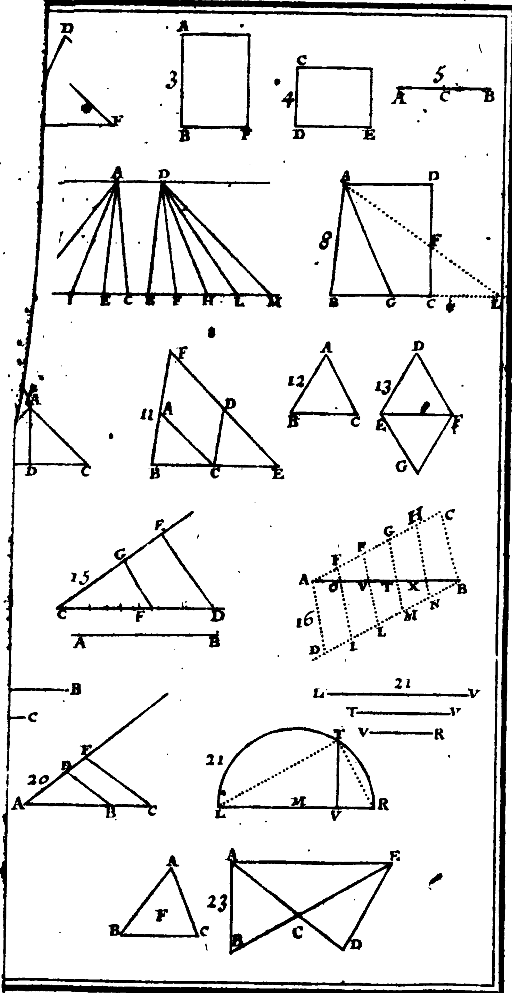


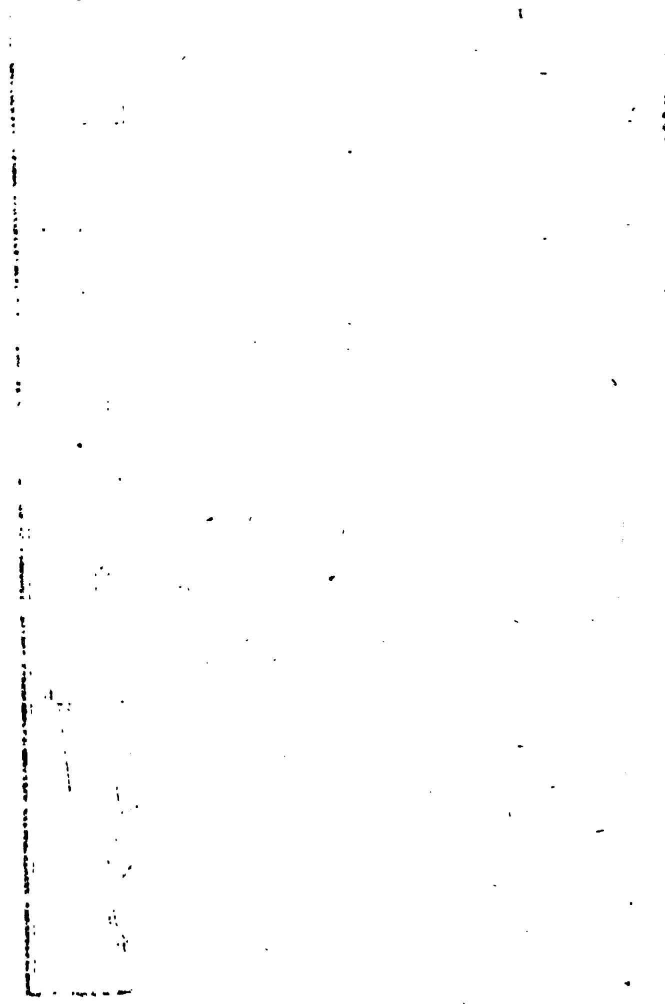


LIVRE ONZIÉME DES ELEMENS D'EUCLIDE.

CE Livre renferme les premiers principes des corps solides, de sorte qu'il est impossible de rien établir touchant la troisiéme espece de la quantité sans sçavoir ce qu'il nous enseigne. C'est ce qui le rend très-nécessaire à la plûpart des Traitez Mathematiques. Premierement, les Spheriques de Theodose le supposent entierement : la Trigonometrie spherique, la troisiéme partie de la Géometrie pratique, plusieurs Propositions de la Statique & de la Geographie, sont établies sur les principes des corps solides. La Gnomonique, les sections Coniques, & le Traité de la Coupe des pierres, ne sont difficiles que parce que l'on est souvent obligé de représenter sur le papier, les figures qui ont du relief, & qui sont comprises par plusieurs surfaces. Je laisse le septiéme, le huitiéme, le neuviéme, & le dixiéme Livres des Elemens d'Euclide, parce qu'ils

L Sixieme Planche premiere.





ſont inutiles à preſque toutes les parties des Mathematiques. Je me ſuis ſouvent étonné qu'on les ait mis au nombre des Elemens, puiſqu'il eſt évident qu'Euclide ne les a composés que pour établir la doctrine des incommenſurables, laquelle n'étant qu'une vaine curioſité, ne devoit pas être placée entre les Livres élementaires, mais devoit former un Traité particulier. On peut dire le même du Livre treiziéme & des autres: ainſi je crois qu'on peut apprendre preſque toutes les Mathematiques, pourvû qu'on ſçache ces huit Livres des Elemens d'Euclide.

LES DEFINITIONS.

1. LE corps ſolide eſt une quantité qui eſt longue, large & profonde ou épaiſſe. *Comme la figure LT: ſa longueur eſt NX, ſa largeur NO, ſon épaiſſeur LN.* Pl. 5. Fig. 1.

2. Les extrêmitez ou bords d'un corps ſolide, ſont les ſurfaces.

3. Une ligne eſt perpendiculaire à un plan, quand elle eſt perpendiculaire à toutes les lignes qu'elle rencontre dans ce Plan. *Comme la ligne AB, ſera perpendiculaire au Plan CD, ſi elle eſt perpendiculaire aux lignes CD, FE; leſquelles étant tirées dans le Plan CD, paſſent par le point B, de ſorte que les angles ABC, ABD, ABE, ABF ſoient droits.* Pl. 12. Fig. 2.

Pl. 1. Fig. 3. 4. Un Plan est perpendiculaire à un autre, quand la ligne perpendiculaire à la commune section des Plans, & tirée dans l'un, est aussi perpendiculaire à l'autre Plan.

Nous appellons commune section des Plans, une ligne qui est dans les deux Plans: comme la ligne AB, qui est aussi bien dans le Plan AC, que dans le Plan AD. Si donc la ligne DE, tirée dans le Plan AD, & perpendiculaire à AB, est aussi perpendiculaire au Plan AC: le Plan AD sera perpendiculaire au Plan AC.

Pl. 1. Fig. 4. 5. Si la ligne AB n'est pas perpendiculaire au plan CD; & si l'on tire du point A, la ligne AE perpendiculaire au plan CD, & ensuite la ligne BE: l'angle ABE, est celui de l'inclinaison de la ligne AB, au plan CD, c'est-à-dire, de la pente de la ligne AB sur le plan CD.

Pl. 1. Fig. 5. 6. L'inclinaison d'un plan à l'autre, est l'angle aigu compris par les deux perpendiculaires à la commune section, tirées dans chaque plan. *Comme l'inclinaison du plan AB au plan AD, n'est autre que l'angle BCD compris par les lignes BC, CD, tirées dans les deux plans, perpendiculairement à la commune section AE.*

7. Les plans seront inclinés de même façon, si les angles d'inclinaison sont égaux.

8. Les plans paralleles étant continués autant qu'on voudra, sont toûjours en même distance l'un de l'autre.

9. Les figures solides semblables, sont comprises ou terminées par autant de plans semblables ; comme deux cubes. *Cette définition ne convient pas aux figures qui ont des surfaces courbes, comme la Sphere, le Cylindre, le Cone.*

10. Les figures solides, égales & semblables, sont comprises ou terminées par autant de plans semblables & égaux. *De sorte que, si on s'imagine qu'elles se pénetrent l'une l'autre ; elles ne se surpasseront pas, ayant les angles & les côtez égaux.*

11. Un angle solide est le concours, Pl. 1.
ou l'inclinaison de plusieurs lignes, qui Fig. 6.
sont dans divers plans. *Comme le concours des lignes AB, AC, AD, qui sont dans divers plans.*

12. La pyramide est une figure solide, Pl. 1.
terminée au moins par trois Triangles, Fig. 6.
qui ont leurs bases dans le même plan. *Comme la figure ABCD.*

13. Le prisme est une figure solide, Pl. 1.
qui a deux plans paralleles, semblables Fig. 7.
& égaux ; & les autres parallelogrames. *Comme la figure AB. Ses plans opposés peuvent être polygones.*

14. La sphere est une figure solide ter-

minée par une ſeule ſurface, de laquelle tirant pluſieurs lignes, à un point pris au milieu de la figure, elles ſeront toutes égales. *Quelques autres définiſſent la Sphere par le mouvement d'un demi-Cercle, qui roule autour de ſon diametre immobile.*

15. L'eſſieu ou l'axe de la ſphere, eſt cette ligne immobile autour de laquelle le demi-Cercle roule.

16. Le centre de la ſphere eſt le même que celui du demi-Cercle qui roule.

17. Le diametre de la ſphere, eſt quelque ligne que ce ſoit, qui paſſe par le centre de la ſphere, & aboutit à ſa ſurface.

Pl. 1. Fig. 8. 18. Si une ligne immobile dans un de ſes points, pris hors d'un plan d'un Cercle, parcourt la circonference; elle décrit un cone. *Comme ſi la ligne AB étant immobile au point A, parcourt la circonference du Cercle BED : elle décrira le cone ABED. Le point A ſera ſon ſommet, & le Cercle BED ſa baſe.*

19. L'eſſieu du cone, eſt la ligne tirée de ſon ſommet, au centre de la baſe. *Comme AC.*

Pl. 1. Fig. 9. 20. Si une ligne parcourt de telle ſorte la circonference de deux Cercles paralleles, qu'elle ſoit toûjours parallele à celle qui eſt tirée d'un centre à l'autre, c'eſt-à-

dire,

dire, à l'essieu ; elle décrira un cylindre.

21. Les Cones & les Cylindres sont droits, quand l'essieu est perpendiculaire au plan de la base : & les Cones droits sont semblables quand leur essieu, & les diametres des bases sont en même raison. Il faut ajoûter aux inclinés, pour être semblables, que leurs essieux soient également inclinés au plan de leur base.

22. Un Parallelipipede est un solide terminé par six parallelogrames, dont les opposés sont paralléles & égaux.

PROPOSITION I.

THEOREME.

Une ligne droite ne peut avoir une de ses parties dedans un plan, & l'autre dehors.

SI la ligne AB est dans le plan AD, étant continuée, elle n'en sortira pas ; mais toutes ses parties seront dans le même plan. Car s'il se peut faire que BC soit partie de la ligne AB continuée. Tirez dans le plan FD, la ligne BD perpendiculaire à AB, tirez aussi dans le même plan BE perpendiculaire à BD. Pl. 1. Fig. 10.

Démonstration.

Les angles ABD, DBE sont deux angles droits : donc (par la 14. du 1.) AB, BE ne sont qu'une même ligne : & par consequent BC, n'est pas partie de la ligne AB continuée : autrement deux lignes droites CB, EB, auroient la même partie AB ; ce que nous avons rejetté dans la 13. Maxime du premier Livre.

USAGE.

Nous établissons sur cette Proposition un principe de Gnomonique, qui est que l'ombre d'un style ne tombe pas hors du plan d'un grand Cercle, dans lequel est le Soleil. Puisque le bout du style est pris pour le centre du Ciel ; & par consequent pour le centre de tous les grands Cercles : l'ombre étant toûjours en ligne droite du rayon, tiré depuis le Soleil jusques au corps opaque ; ce rayon étant dans ce grand Cercle, il faut que l'ombre y soit aussi. Voyez la Gnomonique de Monsieur Ozanam.



PROPOSITION II.

THEOREME.

Les lignes qui se coupent sont dans le même plan, aussi-bien que toutes les parties d'un Triangle.

SI les deux lignes BE, CD se coupent au point A; & si on forme un Triangle, tirant la base BC; je dis que toutes les parties du Triangle ABC, sont dans le même plan, & que les lignes BE, CD, y sont aussi. Pl. 12 Fig. 119

Démonstration.

On ne peut pas dire qu'aucune partie du Triangle ABC soit dans un plan, & que l'autre partie en soit dehors, qu'on ne dise qu'une partie d'une ligne est dans un plan, que l'autre partie de la même ligne n'y est pas; ce qui est contraire à la premiere Proposition: & puisque les côtez du Triangle sont dans le même plan dans lequel est le Triangle; les lignes BE, CD seront dans le même plan.

USAGE.

Cette Proposition détermine suffisamment un plan par deux lignes droites qui se

rencontrent, ou par un Triangle. Je m'en suis servi dans l'optique, pour prouver que les lignes paralleles objectives, qui rencontrent le tableau, doivent être représentées par des lignes qui concourent dans un point.

PROPOSITION III.

THEOREME.

La commune section des deux plans est une ligne droite.

Pl. 1. Fig. 12. SI les plans AB, CD se coupent, leur commune section EF, sera une ligne droite. Car si elle ne l'étoit pas, prenez deux points communs aux deux plans qui soient E & F; & tirez une ligne droite du point E au point F, dans le plan AB, & que ce soit EHF. Tirez aussi dans le plan CD, une ligne droite EF : si elle n'est pas la même que la précedente, que ce soit EGF.

Démonstration.

Ces lignes tirées dans les deux plans, sont deux lignes differentes, & elles renferment un espace; ce qui est contraire à la douziéme Maxime; donc elles ne feront qu'une même ligne droite, laquelle

étant dans les deux plans, sera leur commune section.

USAGE.

Cette Proposition est fondamentale. Nous la supposons dans la Gnomonique, quand nous représentons dans nos cadrans solaires, les Cercles des heures, en marquant par une ligne droite la commune section de leur plan, & de celui de la muraille. On la suppose aussi dans les autres; de sorte que même on ne la cite pas.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Si une ligne est perpendiculaire à deux autres qui se coupent, elle le sera aussi au plan des mêmes lignes.

SI la ligne AB est perpendiculaire aux lignes CD, EF, qui se coupent au point B; de sorte que les angles ABC, ABD, ABE, ABF soient droits; elle sera perpendiculaire au plan des lignes CD, EF; c'est-à-dire, qu'elle sera perpendiculaire à toutes les lignes qu'on tirera dans le même plan, par le point B: comme à la ligne GBH. Qu'on coupe les lignes égales, BC, Pl. 1. Fig. 13.

BD, BE, BF; & qu'on tire les lignes EC, DF, AC, AD, AE, AF, AG & AH.

Demonstration.

1. Les quatre Triangles ABC, ABD, ABE, ABF, ont les angles droits au point B; & les côtez BC, BD, BE, BF, égaux avec le côté AB, qui leur est commun. Donc les bases AC, AD, AE, AF sont égales (par la 4. du 1.)

2. Les Triangles EBC, DBF seront égaux en tout sens, ayant les côtez BC, BD, BE, BF égaux, & les angles CBE, DBF opposés au sommet étant égaux: ainsi les angles BCE, BDF, BEC, BFD seront égaux (par la 4. du 1.) & les bases EC, DF égales.

3. Les Triangles GBC, DBH, ayant les angles opposés CBG, DBH égaux, comme aussi les angles BDH, BCG, & les côtez BC, BD: ils auront (par la 26. du 1.) les côtez BG, BH; CG, DH, égaux.

4. les Triangles ACE, AFD ayant les côtez AC, AD, AE, AF égaux, & les bases EC, DF égales, ils auront (par la 8. du 1.) les angles ADF, ACE égaux.

5. Les Triangles ACG, ADH ont les côtez AC, AD, CG, DH égaux; avec les angles ADH, ACG: ils auront donc les bases AG, AH égales.

6. Enfin les Triangles ABH, ABG ont

tous les côtez égaux : donc (par la 8. du 1.) les angles ABG, ABH seront égaux, & la ligne AB perpendiculaire à GH. Ainsi la ligne AB sera perpendiculaire à quelque ligne qu'on tire par le point B, dans le plan des lignes CD, EF ; ce que j'appelle être perpendiculaire au plan.

USAGE.

Cette Proposition revient fort souvent dans le premier Livre de Theodose : par exemple, pour montrer que l'essieu ou axe du monde est perpendiculaire au plan de l'équinoxial. Pareillement dans la Gnomonique, nous démontrons par cette Proposition, que la ligne équinoxiale est perpendiculaire à la meridienne, dans les cadrans horizontaux. Elle n'est pas moins utile dans les autres traitez ; comme dans celui des Astrolabes, ou dans celui de la Coupe des pierres.

PROPOSITION V.

THEOREME.

Si une ligne est perpendiculaire à trois autres qui se coupent dans le même point : elles seront toutes trois dans un même plan.

SI la ligne AB est perpendiculaire aux trois lignes BC, BD, BE, qui se cou- Pl. 1. Fig. 14.

pent dans même point B, les lignes BC, BD, BE, sont dans le même plan. Que le plan AE soit celui des lignes AB, BE; & que CF soit celui des lignes BC, BD. Si BE étoit de la commune section de ces deux plans, BE seroit dans le plan des lignes BC, BD, comme nous le prétendons: si EB n'est pas la commune section, que ce soit BG.

Démonstration.

AB est perpendiculaire aux lignes BC, BD: elle est donc perpendiculaire à leur plan CF (par la 4.) & (par la 3. défin.) AB sera perpendiculaire à BG. Or on suppose qu'elle est perpendiculaire à BE: donc les angles ABE, ABG seroient droits & égaux, & néanmoins l'un est partie de l'autre. Ainsi les deux plans ne peuvent avoir autre commune section que BE: elle est donc dans le plan CF.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Les lignes qui sont perpendiculaires au même plan, sont paralleles.

Pl. 1. Fig. 15. SI les lignes AB, CD sont perpendiculaires au même plan EF; elles seront

paralleles. Il est évident que les angles internes ABD, BDC sont droits : mais cela ne suffit pas ; car il faut encore prouver que les lignes AB, CD sont dans le même plan. Tirez DG, perpendiculaire à BD, & égale à AB : tirez aussi les lignes BG, AG, AD.

Démonstration.

Les Triangles ABD, BDG, ont les côtez AB, DG égaux ; BD est commun : les angles ABD, BDG sont droits. Donc les bases AD, BG sont égales (par la 4. du 1.) De plus, les Triangles ABG, ADG, ont tous les côtez égaux : donc les angles ABG, ADG sont égaux : & ABG étant droit, puisque AB est perpendiculaire au plan, l'angle ADG est droit. Donc la ligne DG est perpendiculaire aux trois lignes CD, DA, BD ; lesquelles par consequent sont dans le même plan (par la 5.) Or la ligne AB est aussi dans le plan des lignes AD, DB (par la 2.) donc AB, CD sont dans le même plan.

Corollaire. Deux lignes paralleles sont dans le même plan.

USAGE.

Nous démontrons par cette Proposition, que dans les cadrans solaires, les lignes des heures sont paralleles entr'elles, dans tous les plans qui sont paralleles à l'essieu

du monde; comme dans les polaires, meridiens & autres décrits sur des plans paralleles à un Horizon de la Sphere droite.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

La ligne qui est tirée d'une parallele à l'autre est dans leur même plan.

Pl. 1. Fig. 16. LA ligne CB étant tirée du point B de la ligne AB, au point C de sa parallele CD. Je dis que la ligne CB, est dans le plan des lignes AB, CD.

Démonstration.

Les paralleles AB, CD sont dans le même plan: dans lequel si vous tirez une ligne droite du point C, au point B, elle sera la même que CB: autrement deux lignes droites renfermeroient un espace contre la douziéme Maxime.



PROPOSITION VIII.

THEOREME.

Si de deux lignes paralleles, l'une est perpendiculaire à un plan, l'autre le sera aussi.

SI de deux lignes paralleles AB, CD; l'une AB est perpendiculaire au plan EF: CD le sera aussi. Tirez la ligne DB; puisque ABD est un angle droit, & que les lignes AB, CD sont supposées paralleles; l'angle CDB sera droit (par la 30. du 1.) Donc si je montre que l'angle CDG est droit, j'aurai prouvé (par la 4.) que CD, est perpendiculaire au plan EF. Faites l'angle droit BDG, & prenez DG égale à AB: tirez ensuite les lignes BG, AG. Pl. 1. Fig. 154

Démonstration.

Les Triangles ABD, BDG ont les côtez AB, DG égaux: le côté BD leur est commun, les angles ABD, BDG sont droits: donc (par la 4. du 1.) les bases AD, BG sont égales. Les Triangles ADG, ABG, ont tous les côtez égaux: ainsi (par la 8. du 1.) les angles

ADG, ABG sont égaux. Ce dernier est droit, puisque la ligne AB est supposée perpendiculaire au plan EF : donc l'angle ADG est droit ; & la ligne DG étant perpendiculaire aux lignes DB, DA, sera perpendiculaire au plan des lignes AD, BD, qui est le même dans lequel sont les paralleles AB, CD. Ainsi l'angle GDC est un angle droit (par la défin. 3.) & CDB étant aussi droit, CD sera perpendiculaire au plan EF.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

Les lignes paralleles à une troisiéme, sont paralleles entr'elles.

Pl. 1. Fig. 17. SI les lignes AB, CD sont paralleles à la ligne EF ; elles seront paralleles entr'elles, quoiqu'elles ne soient pas toutes trois dans le même plan. Tirez dans le plan des lignes AB, EF, la ligne HG perpendiculaire à AB : elle le sera aussi à EF : (par la 29. du 1.) Pareillement tirez dans le plan des lignes EF, CD, la ligne HI perpendiculaire à EF, elle le sera à CD.

Démonstration.

La ligne EH étant perpendiculaire aux lignes HG, HI, l'est aussi au plan des lignes HG, HI (par la 4.) donc (par la 8.) les lignes AG, CI le sont aussi, & (par la 6.) elles seront paralleles.

USAGE.

Cette Proposition sert souvent dans la Perspective, pour déterminer dans un tableau l'image des lignes paralleles; & dans la coupe des Pierres, où l'on trouve que les deux côtez des paneaux sont paralleles entr'eux, parce qu'ils le sont à quelque ligne qui est dans un plan different. Dans la Gnomonique, nous prouvons que les Cercles verticaux doivent être marqués dans les murailles par des lignes à plomb, parce que les lignes qui sont leurs communes sections avec la muraille, sont paralleles à la ligne tirée du zenith au nadir.

PROPOSITION X.

THEOREME.

Si deux lignes qui concourent sont paralleles à deux autres, de different plan, elles formeront un angle égal.

SI les lignes AB, CD; AE, CF sont paralleles, quoiqu'elles ne soient pas Pl. 2. Fig. 13.

toutes quatre dans le même plan, les angles BAE, DCF feront égaux : Que les lignes AB, CD; AE, CF soient égales : & tirez les lignes BE, DF, AC, BD, EF.

Demonstration.

Les lignes AB, CD sont supposées paralleles & égales : donc (par la 33. du 1.) les lignes AC, BD sont paralleles & égales; comme aussi AC, EF; & (par la precedente) BD, EF seront paralleles & égales : & (par la 33. du 1.) BE, DF seront aussi paralleles & égales. Ainsi les Triangles BAE, DCF ont tous les côtez égaux : & (par la 8.) les angles BAE, DCF seront égaux.

Corollaire. On pourroit faire quelques Propositions semblables, qui ne seroient pas inutiles, comme celle-ci. Si on tire dans un plan parallele, la ligne CD, parallele à AB; & si les angles BAE, DCF sont égaux, les lignes AE, CF sont paralleles.

USAGE.

Nous démontrons par cette Proposition, que les angles que font les plans des Cercles horaires dans un plan parallele à l'Equateur, sont égaux à ceux qu'ils font dans le plan de l'Equateur.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

Tirer une perpendiculaire à un plan d'un point donné hors de ce plan.

SI vous voulez du point C, tirer une perpendiculaire au plan AB : tirez la ligne EF à discretion, & CF qui lui soit perpendiculaire (par la 12. du 1.) Tirez ensuite (par la 11. du 1.) dans le plan AB, la ligne FG perpendiculaire à ED, & CG perpendiculaire à FG. Je démontre que CG sera perpendiculaire au plan AB. Tirez GH parallele à FE. Pl. 11. Fig. 19.

Démonstration.

La ligne EF étant perpendiculaire aux lignes CF, FG ; sera perpendiculaire au plan CFG (par la 4.) & HG étant parallele à EF, sera aussi perpendiculaire au même plan (par la 8.) Et puisque CG est perpendiculaire aux lignes GF, GH ; elle sera perpendiculaire au plan AB (par la 4.)

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

Tirer une perpendiculaire à un plan, par un point de même plan.

Pl. 1. Fig. 20. POur tirer par le point C, une perpendiculaire au plan AB : tirez du point E pris à discretion hors du plan, ED perpendiculaire au même plan (par la 11.) Tirez aussi par la 30. du 1.) CF parallele à DE ; CF sera perpendiculaire au plan AB (par la 8.)

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

On ne peut pas tirer par le même point, deux perpendiculaires à un plan.

Pl. 1. Fig. 21. SI les deux lignes CD, CE tirées par le même point C étoient perpendiculaires au plan AB, & que CF fût la commune section du plan de ces lignes, avec le plan AB : les angles ECF, DCF seroient droits ; ce qui est impossible, l'un étant partie de l'autre.

J'ajoûte

J'ajoûte qu'on ne peut pas tirer du même point D, deux perpendiculaires DC, DF, au même plan AB; car ayant tiré la ligne CF, on auroit deux angles droits DCF, DFC dans un Triangle (contre la 32. du 1.)

USAGE.

Cette Proposition a été nécessaire pour montrer que la ligne perpendiculaire a un plan, étoit assez déterminée, puisqu'on n'en peut tirer qu'une seule pour un point.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

Les plans sont paralleles, ausquels la même ligne est perpendiculaire.

SI la ligne AB est perpendiculaire aux plans AC, BD, ils seront paralleles; c'est-à-dire, qu'ils seront par tout également éloignés l'un de l'autre. Tirez la ligne DC parallele à AB (par la 31. du 1.) & tirez les lignes BD, AC. Pl. 1. Fig. 22.

Démonstration.

On suppose que AB est perpendiculaire aux plans AC, BD: donc la ligne CD qui lui est parallele, leur sera aussi perpendiculaire (par la 8.) ainsi les angles B

E e

D, A & C seront droits, & (par la 29. du 1.) les lignes AC, BD seront paralleles. La figure ABCD sera donc parallelograme. Or (par la 34. du 1.) les lignes AB, CD sont égales; c'est à dire, que les plans dans les points A & C, sont également éloignés: ainsi pouvant tirer la ligne CD, par quelque point que ce soit, les plans AB, CD seront par tout également éloignés l'un de l'autre.

USAGE.

Theodose démontre que les Cercles qui ont les mêmes poles, comme l'équinoxial, & les tropiques sont paralleles; parce que l'essieu du monde est perpendiculaire à leur plan.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

Si les deux lignes qui se rencontrent au même point, sont paralleles à deux lignes d'un autre plan; les plans de ces lignes seront paralleles.

Pl. 2. Fig. 23. SI les lignes AB, AC sont paralleles aux lignes DF, DE qui sont dans un autre plan; les plans BC, FE sont paralleles. Tirez AI perpendiculaire au plan BC (par la 11.) & GI, IH paralleles à

FD, DE; elles le seront aussi aux lignes AB, AC (par la 9.)

Démonstration.

Les lignes AB, GI sont paralleles; & l'angle IAB est droit, puisque IA est perpendiculaire au plan BC: donc (par la 29. du 1.) l'angle AIG est droit, AIH est aussi droit. Donc (par la 4.) la ligne AI est perpendiculaire au plan GH; & l'étant aussi au plan BC, les plans BC, FE seront paralleles (par la 14.)

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

Si un plan en coupe deux qui soient paralleles, ses communes sections avec eux seront paralleles.

SI le plan AB en coupe deux autres paralleles AC, BD: Je démontre que les communes sections AF, BE seront paralleles. Car si elles ne l'étoient pas, elles se rencontreroient étant continuées, par exemple au point G. Pl. 2. Fig. 24.

Démonstration.

Les lignes AF, BE sont dans les plans AC, BD, & n'en sortent pas (par la 1.) donc si elles se rencontrent en G, les plans

se rencontreront aussi, & par consequent ils ne seront pas paralleles, contre ce que nous avons supposé.

USAGE.

Nous démontrons par cette Proposition, dans le Traité des Sections coniques, & cylindriques, que le Cone, ou le Cylindre étant coupé par un plan parallele à sa base, les sections sont des Cercles; nous décrivons les Astrolabes: nous prouvons dans la Gnomonique, que les angles que font les Cercles horaires, avec un plan parallele à un grand Cercle, sont égaux à ceux qu'ils forment dans le même Cercle: nous démontrons dans la Perspective, que les images des lignes objectives perpendiculaires au tableau, concourent au point de vûe.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

Deux lignes sont divisées proportionnellement par des plans paralleles.

Pl. 2. Fig. 25. QUE les lignes AB, CD soient divisées par des plans paralleles. Je dis que AE est à EB, en même raison que CF à FD, tirez la ligne AD, qui rencontre

le plan EF, au point G : tirez aussi AC, BD, FG, EG.

Démonstration.

Le plan du Triangle ABD, coupe les trois plans : donc (par la 16.) les sections BD, EG seront paralleles : & (par la 2. du 6.) il y aura même raison de AE à EB, que de AG à GD. Pareillement le plan du Triangle ADC, coupe les plans EF, AC : donc les sections AC, GF, sont paralleles, & il y aura même raison de FC à FD, que de AG à GD, c'est-à-dire, que de AE à EB.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

Si une ligne est perpendiculaire à un plan, tous les plans dans lesquels elle se trouvera, seront perpendiculaires au même plan.

SI la ligne AB est perpendiculaire au plan ED : tous les plans dans lesquels elle se trouvera, seront perpendiculaires au plan ED. Que AB soit dans le plan AE, qui ait pour commune section avec le plan ED, la ligne BE à laquelle on tire la perpendiculaire FI.

Pl. 11. Fig. 16.

Démonstration.

Les angles ABI, BIF sont droits : donc les lignes AB, FI sont paralleles : & (par la 8.) FI sera perpendiculaire au plan ED. Ainsi le plan AE, sera perpendiculaire au plan ED (par la défin. 5.)

USAGE.

La premiere Proposition de la Gnomonique, & qui peut passer pour fondamentale, est établie sur cette Proposition : de laquelle on se sert aussi fort souvent dans la Trigonometrie spherique, dans la Perspective, & generalement dans tous les Traitez qui sont obligés de considerer plusieurs plans.

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

Si deux plans qui se coupent sont perpendiculaires à un autre, leur commune section lui sera aussi perpendiculaire.

Pl 2. Fig. 27. SI les plans AB, ED qui se coupent, sont perpendiculaires au plan IK, leur commune section EF est perpendiculaire au plan IK.

Demonstration.

Si EF n'est pas perpendiculaire au plan IK ; qu'on tire dans le plan AB, la ligne

GF, perpendiculaire à la commune section BF, & puisque le plan AB est perpendiculaire au plan IK; la ligne GF, sera perpendiculaire au même plan. Qu'on tire aussi FH perpendiculaire au plan IK. Nous aurions ainsi deux perpendiculaires au même plan, tirées par le même point F, (contre la 13. Prop.) Il faut donc conclure que EF est perpendiculaire au plan IK.

USAGE.

Nous démontrons par cette Proposition, que le Cercle qui passe par les poles du monde & par le zenith, est le meridien, & coupe en deux également tous les arcs diurnes; & que les astres employent autant de temps, depuis leur lever jusqu'à ce Cercle, qu'ils en employent depuis qu'ils y sont arrivés, jusqu'à leur coucher.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

Si trois angles plans composent un angle solide, les deux doivent être plus grands que le troisiéme.

SI les angles BAC, BAD, CAD composent l'angle solide A: & si Pl. 2. Fig. 28.

BAC est le plus grand de tous ; les deux autres BAD, CAD pris ensemble, sont plus grands que BAC. Que l'angle CAE soit égal à CAD ; & que les lignes AD, AE soient égales. Tirez les lignes CEB, CD, BD.

Démonstration.

Les triangles CAE, CAD, ont les côtez AD, AE égaux ; CA, commun ; & les angles CAD, CAE égaux, donc (par la 4. du 1.) les bases CD, CE sont égales. Or les côtez CD, DB sont plus grands que le seul BC, (par la 20. du 1.) donc ayant ôté les lignes égales CD, CE ; la ligne BD sera plus grande que BE. De plus, les Triangles BAE, BAD, ont les côtez AD, AE égaux ; AB commun ; & la base BD, plus grande que EB ; donc (par la 25. du 1.) l'angle DAB est plus grand que l'angle BAE ; & ajoûtant les angles CAD, CAE ; les angles BAD, CAD seront plus grands que BAE, CAE, c'est-à-dire que CAB.



PROPO-

PROPOSIITON XXI.

THEOREME.

Tous les angles plans qui composent un angle solide, sont moindres que quatre droits.

SI les angles plans BAC, CAD, BAD composent l'angle solide A ; ils seront moindres que quatre droits. Tirez les lignes BC, CD, BD; & vous aurez une pyramide, qui a pour base le Triangle BCD. PL. 2. Fig. 29.

Démonstration.

Il se fait un angle solide au point B, duquel, les angles ABC, ABD sont plus grands (par la préced.) que le seul CBD de la base. Pareillement ACB, ACD sont plus grands que le seul BCD : & les angles ADC, ADB sont plus grands que le seul CDB. Or tous les angles de la base CBD, valent deux droits : donc les angles ABC, ABD, ACB, ACD, ADC, ADB sont plus grands que deux droits. Et parce que tous les angles des trois Triangles BAC, BAD, CAD valent six droits ; en ôtant plus de deux droits, le reste sera moindre que quatre droits pour les angles qui se font au point A. Si l'angle solide A

étoit composé de plus de trois angles plans ; de sorte que la base de la pyramide fût polygone ; on pourroit la partager en Triangles : & ayant fait la supposition, on trouveroit toujours que les angles plans qui forment l'angle solide, sont moindres que quatre droits.

USAGE.

Ces deux Propositions servent pour déterminer, quand de plusieurs angles plans, on peut faire un angle solide ; ce qui est souvent nécessaire dans le Traité de la coupe des pierres, & dans les Propositions suivantes.

Les Propositions vingt-deux & vingt-trois sont inutiles.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

Si un corps solide est terminé par des plans paralleles ; les opposez seront des parallelogrames semblables & égaux.

Pl. 2. Fig. 30. SI le solide AB est terminé par des plans paralleles, les surfaces opposées seront des parallelogrames semblables & égaux.

Démonstration.

Les plans paralleles AC, BE sont coupés sur le plan EF : donc les communes

sections AF, DE sont paralleles (par la 16.) Pareillement DF, AE: donc AD sera un parallelograme. Je démontrerai de la même façon, que AG, FB, CG, & les autres sont des parallelogrames. J'ajoûte que les parallelogrames opposés, par exemple, AG, BF, sont semblables & égaux. Les lignes AE, EG sont paralleles aux lignes FD, BD, & encore égales: donc les angles AEG, FDB sont égaux (par la 15.) Je puis ainsi démontrer, que tous les côtez, & tous les angles des parallelogrames opposés, sont égaux. Donc les parallelogrames sont semblables & égaux.

PROPOSITION XXV.

THEOREME.

Si on divise un parallelepipede, par un plan parallele à un des siens; les deux corps solides, qui résulteront de cette division, seront en même raison que leurs bases.

SI le parallelepipede AB, est divisé par le plan CD, qui soit parallele aux plans opposés AF, BE: le solide AC est à DB, en même raison que la base AI à la base DG. Qu'on s'imagine que la ligne AH, qui marque la hauteur de la figure, Pl. 22 Fig. 31.

est divisée en autant de parties égales qu'on voudra ; par exemple en dix mille, que nous pouvons prendre indivisiblement, c'est-à-dire, sans penser qu'on le peut soûdiviser. Qu'on s'imagine aussi autant de surfaces paralleles à la base AG, qu'il y a de parties dans la ligne AH : je n'en marque qu'une seule pour toutes, qui sera OS : de sorte que le solide AB soit composé de toutes ces surfaces de même épaisseur, comme seroit une rame de papier composée de toutes ses feüilles posées l'une sur l'autre. Il est évident que pour lors le solide AC sera composé de dix mille surfaces égales à la base AI (par la préced.) & le solide DB, contiendra dix mille surfaces égales à la base DG.

Demonstration.

Chaque surface du solide AC, a même raison à chaque surface du solide DB ; que la base AI, à la base DG ; puisqu'elles sont chacunes égales à leurs bases : donc (par la 3. du 5.) toutes les surfaces du solide AC prises ensemble, auront même raison à toutes les surfaces du solide DB, que la base AI, à la base DG. Or toutes les surfaces du solide AC, composent AC, qui n'a point d'autres parties que ces surfaces ; & toutes les surfaces du solide DB, ne sont autre chose que le solide DB : donc le so-

lide AC, a même raison au solide DB que la base AI, à la base DG.

USAGE.

Cette façon de démontrer est de Cavalerius : je la trouve très-claire, pourvû qu'on s'en serve comme il faut, & que la ligne qui sert de mesure aux épaisseurs des surfaces, soit prise de même façon dans l'un & dans l'autre terme. Je m'en servirai encore ci-après, pour rendre plus faciles quelques démonstrations trop embroüillées.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

Un parallelepipede se divise en deux également, par le plan diagonal, ou en deux prismes égaux.

QUE le parallelepipede AB soit divisé par le plan CD, tiré d'un angle à l'autre : Je dis qu'on l'a partagé en deux également. Qu'on s'imagine que la ligne AE est divisée en autant de parties qu'on voudra, & qu'on a tiré par chacune, autant de plans paralleles à la base AF : chacun de ces plans, est un parallelograme égal à la base AF (par la 24.) Pl. 2. Fig 32.

Démonstration.

Tous les parallelogrames qu'on peut tirer paralleles à la base AF, sont divisés en deux également par le plan CD : car les Triangles qui se formeront de côté & d'autre du plan CD, ont leur base commune égale à CG ; & les côtez égaux, puisque ce sont ceux d'un parallelograme. Or il est évident que le parallelepipede AB, ne contient autre chose que ses surfaces parallelogrames, chacune desquelles est divisée en deux Triangles égaux : donc le parallelepipede AB, est divisé en deux également par le plan CD.

Les Propositions XXVII. & XXVIII. sont inutiles selon cette façon de démontrer. Les Propositions XXIX. & XXX. sont aussi inutiles.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

Les parallelepipedes de même hauteur, qui ont la même base, ou des bases égales, sont égaux.

Pl. 1. Fig. 33. & 34. SI les parallelepipedes AB, CD ont une égale hauteur perpendiculaire AE : FG ; avec des bases AH, CI, ou égales, ou la même ; ils seront égaux. Qu'on pose les

deux bases AH, CI sur le même plan; puisque les hauteurs perpendiculaires sont égales, les bases EB, FD seront dans le même plan parallele à celui des bases AH, CI. Qu'on s'imagine que la ligne FG ou EA est divisée en autant de parties égales qu'on voudra : par exemple en dix mille; & qu'on tire par chacune des surfaces ou plans de même épaisseur (pour ainsi dire) je n'en marque qu'un pour tous, qui sera KM. Chaque surface formera dans les solides un plan parallele semblable, & égal à la base (par la 24.) comme KL, OM: & il y en aura autant dans un solide, que dans l'autre; puisque leur épaisseur que je prends perpendiculairement dans les lignes des hauteurs, est égale.

Démonstration.

Il y a même raison de la base AH à la base CI, que de chaque plan KL à OM. Or il y en a pareil nombre dans l'un, que dans l'autre : ainsi il y aura même raison de tous les antecedens à tous les consequens; c'est-à-dire, de tout le solide AB, à tout le solide CD; que de la base AH à la base CI. On suppose aussi que les bases sont égales : donc les solides AB, CD sont égaux.

Coroll. Pour avoir la solidité d'un parallelepipede, on multiplie sa base par sa

hauteur prise perpendiculairement, parce que cette perpendiculaire montre combien on trouve de surfaces égales à la base. *Comme, si je prens le pieds pour mesure indivisible, c'est-à-dite, que je ne veux pas soûdiviser : si la base contenoit 12. pieds quarrés, & que la hauteur perpendiculaire fût de 10 pieds; j'aurois 120. pieds cubiques pour la solidité du corps AB. Car puisque la hauteur AE, a 10. pieds; je puis faire 10. parallelogrames égaux à la base, & qui auront chacun 1. pied d'épaisseur. Or la base avec l'épaisseur d'un pied, fait 12. pieds cubiques : elle en fera donc 120. si elle a la hauteur de 10. pieds.*

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

Les parallelepipedes de même hauteur, sont en même raison que leurs bases.

Pl. 2. Fig. 33. & 34. J'AY démontré cette Proposition dans la précedente, prouvant qu'il y avoit même raison du parallelepipede AB au parallelepipede CD, que de la base AH à la base CI.

Fig. 33. *Coroll.* Les parallelepipedes qui ont les bases égales, sont en même raison que leurs hauteurs; comme les parallelepipe-

des AB, AL, qui ont pour hauteurs perpendiculaires AK, AE : car si on divise la hauteur AK en autant de parties aliquotes qu'on voudra, & AE en autant de parties égales à ces premieres, qu'elle en contiendra, & si on tire par chacune des plans paralleles à la base, autant que AE contiendra de parties aliquotes de AK, autant le solide AB contiendra de surfaces égales à la base, lesquelles sont parties aliquotes du solide AL. Donc il y aura même raison du solide AB au solide AL, que de la hauteur AE à la hauteur AK.

USAGE.

Les trois Propositions précedentes contiennent presque tous les mesurages des parallelepipedes, & servent comme de premiers principes dans cette matiere. C'est ainsi que nous mesurons la solidité des murailles, multipliant leurs bases par leurs hauteurs.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

Les parallelepipedes semblables, sont en raison triplée de leurs côtez homologues.

SI les parallelepipedes AB, CD sont semblables ; c'est-à-dire, si tous les Pl. 2. Fig. 35.

plans de l'un sont semblables aux plans de l'autre ; & si tous leurs angles sont égaux, de sorte qu'on les puisse placer en ligne droite, c'est-à-dire, que AE, EF, HE, EI, GE, EC soient des lignes droites, & qu'il y ait même raison de AE à EF, que de HE à EI, & que de GE à EC. Je dois démontrer que quatre solides sont continuellement proportionnels, selon la raison du côté EA, à celui qui lui est homologue qui sera EF, ou DI.

Démonstration.

Le parallelepipede AB, a même raison à EL de même hauteur, que la base AH à la base EO (par la 32.) Or la base AH à la base EO, a même raison que AE à EF (par la 1. du 6.) Pareillement la raison du solide EL au solide EK est la même que de la base EO à la base ED, c'est-à-dire, que de HE à EI. Enfin le solide EK au solide EN, a même raison que la hauteur GE à la hauteur EC (par le Corol. préced.) ou prenant la ligne EF pour la hauteur commune, que de la base GI à la base CI, c'est-à-dire, que de GE à EC. Or la raison de AE à EF, de HE à EI, de GE à EC, est la même comme nous le supposons. Par consequent, il y a même raison du solide AB à EL, que de EL à EK, & de EK à CD. Donc (par la défin. 12. du 5.)

la raiſon de AB à CD, ſera triplée de celle de AB à EL, ou de AE à ſon côté homologue EF.

Coroll. 1. Il s'enſuit que les parallelepipedes ſemblables, ſont comme les cubes de leurs côtez homologues, parce que les cubes ſont auſſi en raiſon triplée de leurs côtez.

Coroll. 2. Si quatre lignes ſont continuellement proportionnelles, le parallelepipede décrit ſur la premiere, a même raiſon à un ſemblable parallelepipede décrit ſur la ſeconde, que la premiere à la quatriéme; car la raiſon de la premiere à la quatriéme, eſt triplée de la premiere à la ſeconde.

USAGE.

Vous pouvez comprendre par cette Propoſition, que le célébre Probléme de la duplication du cube propoſé par l'Oracle, conſiſte à trouver deux moyennes continuellement proportionnelles. Car ſi vous poſez pour premier terme, le côté du premier cube; que le quatriéme terme ſoit le double de ce premier: ſi vous trouviez deux moyennes proportionnelles; le cube décrit ſur la premiere ligne auroit même raiſon à celui qu'on décriroit ſur la ſeconde, que la premiere ligne à la quatriéme, qui ſeroit comme un à deux. Nous corrigeons auſſi par cette Propoſition la fauſſe opinion de ceux qui s'imaginent,

que les solides semblables, sont en même raison que leurs côtez : comme si un cube d'un pied de long étoit la moitié d'un cube de deux pieds de long, quoiqu'il ne soit que sa huitième partie. C'est le principe de la regle de calibre, laquelle se peut appliquer non-seulement au boulets de canon, mais encore à toute sorte de corps semblables. Par exemple, j'ai vû une personne qui vouloit faire une Architecture navale, & qui vouloit garder les mêmes proportions dans toutes sortes de Vaisseaux : mais il raisonnoit ainsi ; si un Vaisseau de cent tonneaux doit avoir cinquante pieds de quille, celui de deux cens devra avoir cent pieds de quille. En quoi il se trompoit ; car au lieu de faire un vaisseau double du premier, il le faisoit octuple. Il devroit donner au second Vaisseau, pour être double du premier, un peu moins de soixante-trois pieds.

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME.

Les parallelepipedes égaux ont les bases & les hauteurs réciproques, & ceux qui ont les hauteurs & les bases réciproques, sont égaux.

Pl. 2. Fig. 36. & 37. SI les parallelepipedes AB, CD sont égaux, ils auront les bases & les hau-

teurs réciproques ; c'est-à-dire, il y aura même raison de la base AE à la base CF, que de la hauteur CH à la hauteur AG. Ayant fait CI égale à AG, tirez le plan IK parallele à la base CF.

Démonstration.

Le parallelepipede AB, a même raison à CK de même hauteur, que la base AE à CF (par la 32.) Or comme AB est à CK, ainsi CD est au même CK, puisque AB & CD, sont égaux : & comme CD est à CK, qui a la même base, ainsi la hauteur CH est à la hauteur CI (par le Corol. de la 32.) donc, comme la base AE est à la base CF, ainsi la hauteur CH est à la hauteur CI ou AG.

J'ajoûte, que s'il y a même raison de AE à CF, que de la hauteur CH à la hauteur AG; les solides AB, CD seront égaux.

Démonstration.

Il y a même raison de AB à CK de même hauteur, que de la base AE à la base CF (par la 32.) il y a aussi même raison de la hauteur CH à la hauteur CI ou AG, que de CD à CK : nous supposons que la raison de AE à CF, est la même que celle de CH à CI ou AG; ainsi il y aura même raison du solide AB au solide CK, que du solide CD au même solide CK. Donc (par la 9. du 5.)

les solides AB, CD sont égaux.

USAGE.

Cette réciprocation des bases, & des hauteurs, rend ces solides faciles à mesurer : elle a même quelque analogie avec la Proposition quatorzieme du sixiéme Livre, qui porte que les parallelogrames équiangles & égaux, ont les cotez réciproques, & elle demontre aussi bien qu'elle, la pratique de la regle de trois.

La Proposition 35. est inutile.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

Si trois lignes sont continuellement proportionnelles, le parallelepipede fait de ces trois lignes est égal à un parallelepipede équiangle, qui a tous ses cotez égaux à celle du milieu.

Pl. 2. Fig. 38. 39. & 40. SI les lignes A, B, C sont continuellement proportionnelles, le parallelepipede EF, formé de ces trois lignes, c'est-à-dire, qui a le côté FI égal à la ligne A, EH égal à B & HI égal à C, est égal au parallelepipede équiangle KL, qui a les côtez LM, MN, KN, égaux à la ligneB. Qu'on tire des points H & N les lignes

HP, Nq perpendiculaires aux plans des bases : elles seront égales, puisque les angles solides E & K sont supposés égaux, de sorte que s'ils se pénetroient, ils ne se surpasseroient pas l'un l'autre, & que les lignes EH, KN sont supposées égales. Donc les hauteurs HP, Nq sont égales.

Démonstration

Il y a même raison de A à B, ou de FI à LM ; que de B à C, ou de MN à HI : ainsi le parallelograme FH compris sous FI, IH, est égal au parallelograme LN, compris sous LM, MN égales à B (par la 14. du 6.) Les bases sont donc égales. Or les hauteurs HP, Nq le sont aussi. Donc (par la 31.) les parallelepipedes sont égaux.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME.

Si quatre lignes sont proportionnelles, les parallelepipedes semblables decrits dessus ces lignes, sont proportionnels : & si les parallelepipedes semblables sont proportionnels, les cotez homologues le sont aussi.

SI A est à B en même raison que C à D ; les parallelepipedes semblables, Pl. 22. Fig. 41.

qui auront pour côtez homologues les lignes A, B, C, D, seront en même raison.

Demonstration.

Le parallelepipede A est au parallelepipede B en raison triplée de celle de la ligne A à la ligne B, ou de celle de la ligne C à la ligne D. Or le parallelepipede C au parallelepipede D, est aussi en raison triplée de celle de C à D (par la 33.) Il y a donc même raison du parallelepipede A au parallelepipede B, que du parallelepipede C, au parallelepipede D.

J'ajoûte que si les parallelepipedes A, B, C, D, sont proportionnels, les côtez homologues, A, B, C, D, seront aussi proportionnels.

Démonstration.

Puisque (par la supposition) le parallelepipede A, est au parallelepipede B, comme le parallelepipede C, au parallelepipede D, & que (par la 33.) le parallelepipede A, est au parallelepipede B, en raison triplée de celle du côté A, au côté homologue B: & le parallelepipede C, au parallelepipede D, en raison triplée de celle du côté C, au côté homologue D; il y a même raison du côté A, au côté B, que du côté C, au côté D.

PRO-

PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME.

Si deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre; la perpendiculaire tirée d'un point d'un des plans à l'autre, tombera sur la commune section.

SI les plans AB, CD, étant perpendiculaires l'un à l'autre, on tire du point E du plan AB, une ligne perpendiculaire au plan CD; elle tombera sur AG, commune section des plans. Tirez EF perpendiculaire à la commune section AG. Pl. 2. Fig. 42.

Démonstration.

La ligne EF perpendiculaire à AG, commune section des plans, qu'on suppose perpendiculaires, sera perpendiculaire au plan CD (par la défin. 4.) & puisqu'on ne peut pas tirer du point E deux perpendiculaires au plan CD (par la 13.) la perpendiculaire tombera sur la commune section AG.

USAGE.

Cette proposition devroit être après la 17. puisqu'elle regarde les solides en gé-

neral. Elle nous sert dans le Traité des Astrolabes, pour prouver que dans l'Analemme, tous les Cercles perpendiculaires au meridien, se marquent par des lignes droites.

PROPOSITION XXXIX.

THEOREME.

Si on tire dans un parallelepipede, deux plans qui divisent en deux également les côtez opposés, leur commune section, & la diagonale se coupent aussi également.

Pl. 2. Fig. 43. Que les côtez opposés du parallelepipede AB soient divisés en deux également par les plans CD, EF, leur commune section GH, & la diagonale BA se diviseront également au point O. Tirez les lignes BG, GK, AH, LH.

Je prouve premierement qu'elles ne sont qu'une ligne droite: car les Triangles DBG, KMG ont les côtez DB, KM égaux; puisqu'ils sont les moitiez des côtez égaux; comme aussi GD, GM. De plus DB, KM étant paralleles, les angles alternes BDG, GMK seront égaux (par la 28. du 1.) ainsi (par la

4. du 1.) les Triangles DBG, KGM seront égaux en tout sens; & par consequent les angles BGD, KGM: Or (par la 15. du 1.) BG, GK ne font qu'une seule ligne; comme aussi LH, HA; donc ALBK n'est qu'un seul plan dans lequel se trouve la diagonale AB, & GH commune section des plans. Le plan ALBK, coupant les plans paralleles AN, CD aura les communes sections GH, AK paralleles: & (par la 4. du 6.) il y aura même raison de BK à BG, que de BA à BO, & de AK à OG, (par la 4. du 6.) Or BK est double de BG: donc BA est double de BO; comme AK égale à HG, est double de GO. Ainsi les lignes GH, AB se coupent également au point O.

Corol. 1. Tous les diametres se divisent au point O.

Corol. 2. On peut mettre ici quelques Corollaires qui dépendent de plusieurs Propositions: par exemple, que les prismes triangulaires de même hauteur, sont en même raison que leurs bases: car les parallelepipedes desquels ils sont la moitié (par la 32.) sont en même raison que les bases: ainsi les moitiez des bases, & les moitiez des parallelepipedes; c'est-à-dire, les prismes seront en même raison.

Corol. 3. Les prismes polygones de

même hauteur, ont aussi même raison que leurs bases ; puisqu'on les peut résoudre en prismes triangulaires, qui seront chacun en même raison que leurs bases.

Corol. 4. On peut appliquer aux prismes les autres Propositions des parallelepipedes : par exemple, que les prismes égaux ont les hauteurs & les bases réciproques : que les prismes semblables sont en raison triplée de celle de leurs côtez homologues.

USAGE.

Cette Proposition peut servir pour trouver le centre de gravité des parallelepipedes, & pour démontrer quelques Propositions du treiziéme & du quatorziéme Livre d'Euclide.

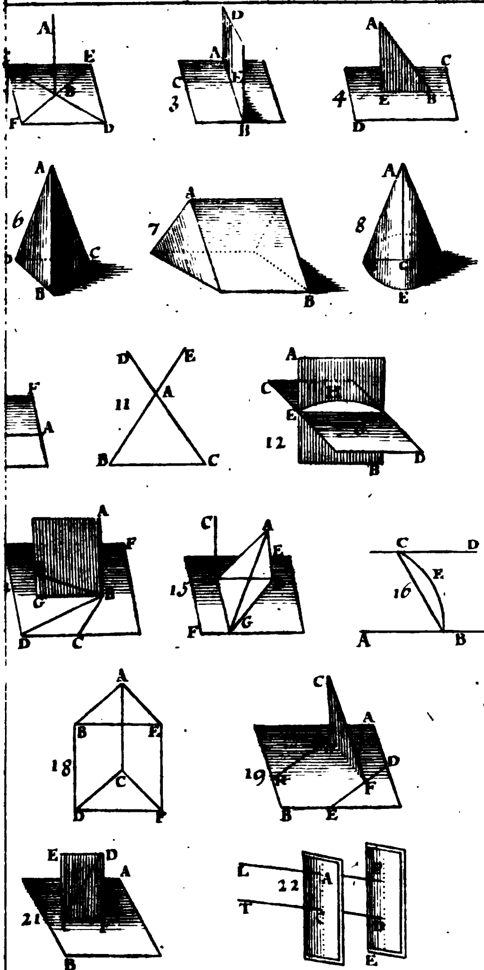
PROPOSITION XL.

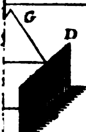
THEOREME.

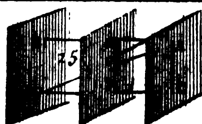
Le prisme qui a pour base un parallelograme double de la base triangulaire d'un autre, & de même hauteur, lui est égal.

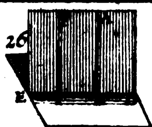
Pl. 2. Fig. 44. & 45. QU'ON propose deux prismes triangulaires ABE, CDG, de même

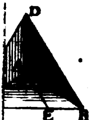
Livre onzieme Planche premiere .

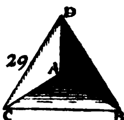


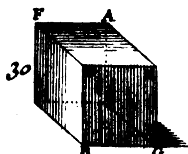

G
D

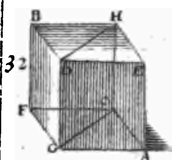

25

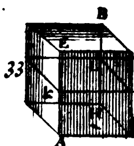

26
E

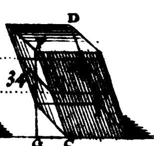

D
E
B

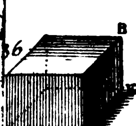

D
29
A
C
B

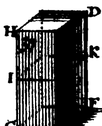

F
A
30
B
G

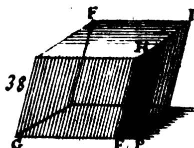

B
H
32
F
A


B
33
A

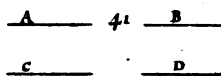

D
34
G
C

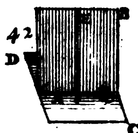

B
36

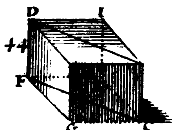

D
H
K
I
F
C

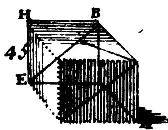

F
I
H
38
G
E
P


M


A
41
B
C
D


B
42
D
C


D
I
44
F
G
C

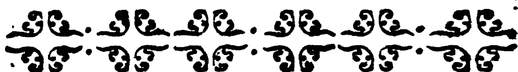

H
B
45
E

hauteur, & qu'on prenne pour baſe du premier le parallelograme AE double du Triangle FGC, baſe du ſecond priſme. Je dis que ces priſmes ſont égaux. Imaginez-vous que les parallelepipedes AH, GI ſont achevés.

Démonſtration.

On ſuppoſe que la baſe AE eſt double du Triangle FGC : Or le parallelograme GK étant auſſi double du même Triangle (par la 34 du 1.) les parallelogrames AE, GK ſont égaux : & par conſequent les parallelepipedes AH, GI, qui ont les baſes & les hauteurs égales, ſont égaux ; & les priſmes qui en ſont la moitié (par la 26.) ſeront auſſi égaux.





LIVRE DOUZIE'ME DES ELEMENS D'EUCLIDE.

EUclide, après avoir donné dans les Livres précedens, les principes generaux des corps solides, & expliqué la façon de mesurer les plus reguliers, c'est-à-dire, ceux qui sont terminés par des surfaces plates; traite dans celui-ci des corps renfermés dans des surfaces courbes, comme sont le Cylindre, le Cone, & la Sphere, & les comparant l'un avec l'autre, il donne les regles de leur solidité, & la façon de les mesurer. Ce Livre est fort utile, puisque nous y trouvons des principes sur lesquels les plus sçavans Géometres ont établi tant de belles démonstrations du Cylindre, du Cone & de la Sphere.

PROPOSITION I.

THEOREME.

Les polygones semblables, inscrits dans des Cercles, sont en même raison que les quarrez des diametres des mêmes Cercles.

SI les polygones ABCDE, FGHKL inscrits dans des Cercles, sont semblables; ils seront en même raison que les quarrez des diametres AM, FN. Tirez les lignes BM, GN, FH, AC. Pl. 12. Fig. 1. & 2.

Démonstration.

On suppose que les polygones sont semblables, c'est-à-dire, que les angles B & G sont égaux; & qu'il y a même raison de AB à BC, que de FG à GH: d'où je conclus (par la 6. du 6.) que les Triangles ABC, FGH sont équiangles, & que les angles ACB, FHG sont égaux: ainsi (par la 21. du 3.) les angles AMB, FNG sont aussi égaux. Or les angles ABM, FGN étant dans un demi-Cercle, sont droits (par la 31. du 3.) & par consequent les Triangles ABM, FGN sont équiangles. Donc (par la 4. du 6.) il y aura même raison de AB à FG, que de AM à FN (par

la 22. du 6.) si on décrit deux polygones semblables sur AB & FG, qui sont ceux qu'on a proposez; & deux autres aussi semblables sur AM & FN, qui seront leurs quarrez: il y aura même raison du polygone ABCDE au polygone FGHKL, que du quarré de AM au quarré de FN.

LEMME.

Si une quantité est plus petite qu'un Cercle, on pourra inscrire dans le même Cercle, un polygone régulier plus grand que cette quantité.

Pl. 1. Fig. 3. 4. & 5. *Que la figure A soit plus petite que le Cercle B; on pourra inscrire dans le même Cercle, un polygone regulier plus grand que la figure A. Que la figure G soit la difference de la figure A, & du Cercle B, de sorte que les figures A & G prises ensemble soient égales au Cercle B. Inscrivez dans le Cercle B, le quarré CDEF (par la 6. du 4.) si ce quarré étoit plus grand que la figure A, nous aurions ce que nous pretendons. S'il est plus petit, divisez les quarts de Cercle CD, DE, EF, FC, en deux également par les points H, I, K, L, de sorte que vous ayez un octogone. Que si l'octogone est encore plus petit*

que

que la figure A, soudivisez les arcs, & vous aurez un polygone de seize côtez, puis de trente-deux, de soixante-quatre. Je dis qu'enfin vous aurez un polygone plus grand que la figure A; c'est-à-dire, un polygone moins different du Cercle, que n'est la figure A; de sorte que la difference sera moindre que la figure G.

Démonstration.

Si *Le quarré inscrit est plus de la moitié du Cercle, étant la moitié du quarré décrit autour du Cercle; & en décrivant l'octogone, vous prenez plus de la moitié du reste, c'est-à-dire, des quatre segmens CHD, DIE, EKF, CLF. Car le Triangle CHD est la moitié du rectangle CO (par la 34. du 1.) il est donc plus de la moitié du segment CHD, il en est de même des autres arcs. Pareillement, en décrivant un polygone de seize côtez, vous prenez plus de la moitié de ce qui restoit du Cercle; & ainsi de tous les autres. Vous laisserez donc enfin une plus petite quantité que G: Car il est évident qu'ayant supposé deux quantitez inégales, si vous prenez plus de la moitié de la plus grande, & ensuite plus de la moitié de ce qui reste, & encore plus de la moitié de celle qui reste; enfin ce qui restera sera moindre que la seconde quantité.*

PROPOSITION II.

THEOREME.

Les superficies des Cercles sont en même raison que les quarrez de leurs diametres.

Pl. 1. Fig. 6. 7. & 8. JE démontre que les Cercles A & B sont en même raison que les quarrez de CD, EF. Car s'ils n'étoient pas en même raison, le Cercle A auroit plus grande raison au Cercle B, que le quarré de CD au quarré de EF. Que la figure G ait même raison au Cercle B, que le quarré de CD au quarré de EF : la figure G, sera plus petite que le Cercle A ; & par le Lemme précedent, on pourra inscrire un polygone régulier plus grand que G dans le Cercle A. Qu'on inscrive aussi dans le Cercle B, un semblable polygone regulier.

Démonstration.

Le polygone de A au polygone de B, a même raison, que le quarré de CD au quarré de EF, (par la 1.) c'est-à-dire, la même que G au Cercle B : Or la quantité G est plus petite que le polygone inscrit dans A ; ainsi (par la 14. du 5.)

le Cercle B seroit plus petit que le polygone qui y est inscrit, ce qui est évidemment faux. Il faut donc dire que la figure G moindre que le Cercle A, ne peut pas avoir même raison au Cercle B, que le quarré de CD au quarré de EF : & par consequent, que le Cercle A n'a pas plus grande raison au Cercle B, que le quarré de CD au quarré de EF. Il ne l'a pas aussi plus petite, parce que le Cercle B au Cercle A, auroit plus grande raison ; & on lui appliqueroit la même démonstration.

Corollaire 1. Les Cercles sont en raison doublée de celle de leurs diametres ; parce que les quarrez étant des figures semblables, sont en raison doublée de celle de leurs côtez (par la 20. du 6.)

Corollaire 2. Les Cercles sont en même raison, que les polygones semblables qui y sont inscrits.

Corollaire 3. Il faut bien remarquer cette regle generale : Quand des figures semblables, inscrites dans d'autres ; de telle sorte qu'elles s'en approchent toujours davantage, & qu'elles dégenerent enfin en ces figures, sont toujours en même raison : les figures qui les comprennent, sont aussi en même raison. Je veux dire que si de semblables polygones ré-

guliers inſcrits dans divers Cercles, ſont toujours en même raiſon que les quarrez des diametres ; & que les faiſant de plus de côtez, ils s'en approchent toujours davantage : les Cercles auront même raiſon que les quarrez des diametres. Cette façon de meſurer les corps ronds par inſcription eſt très-utile.

USAGE.

Cette Propoſition eſt fort univerſelle, & fait que nous raiſonnons des Cercles, de même façon que des quarrez. Par exemple, nous diſons (dans la 47. du 1.) que dans un Triangle rectangle le ſeul quarré de la baſe, eſt égal aux quarrez des côtez pris enſemble. Nous pouvons dire le même des Cercles ; c'eſt-à-dire, que le Cercle décrit ſur la baſe d'un Triangle rectangle, eſt égal aux Cercles qui ont les côtez pour diametres : & de cette ſorte, nous pouvons augmenter ou diminuer les Cercles ſelon la proportion que nous voulons. Nous prouvons auſſi dans l'Optique, que la lumiere décroît en raiſon doublée de celle des diſtances des corps lumineux.



PROPOSITION III.

THEOREME.

Toute pyramide qui a la base triangulaire, peut être divisée en deux prismes égaux, qui sont plus de la moitié de la pyramide, & en deux pyramides égales.

ON peut trouver dans la pyramide ABCD, deux prismes égaux EBFI, EHKD qui seront plus grands que la moitié de la pyramide. Divisez les six côtez de la pyramide en deux également en G, F, E, I, H, K; & tirez les lignes EG, GF, FE, EI, HI, FH, IK, EK. Pl. 14. Fig. 3.

Demonstration.

Dans le Triangle ABD, il y a même raison de AG à GB, que de AF à FD; puisque les lignes sont égales: donc (par la 2. du 6.) GF, BD sont parallèles; & GF sera la moitié de BD, c'est-à-dire, égale à BH. Pareillement GE, BI; FE, HI seront paralleles & égales: & (par la 15. du 11.) les plans GFE, BHI seront paralleles, & par consequent EBFI sera un prisme. J'en dis de même de la figure HEKD, laquelle sera aussi un prisme égal

à l'autre (par la 40. du 11.) puisque la base parallelograme HIKD, est double de la triangulaire BHI (par la 41. du 1.)

En second lieu, les pyramides AEFG, ECKI sont semblables & égales.

Démonstration.

Les Triangles AFG, AEF sont égaux (par la 8. du 1.) comme aussi ECK, EIK: pareillement les Triangles AGE, EIC, & ainsi des autres Triangles des pyramides: elles sont donc égales (par la défin. 10. du 11.) Elles sont encore semblables à la grande pyramide AB, DC; car les Triangles ABC, AGE sont semblables (par la 2. du 6.) les lignes GE, BC étant paralleles; ce que je puis démontrer de tous les autres Triangles des petites pyramides.

Enfin je dis que les prismes sont plus de la moitié de la premiere pyramide. Car si chacun étoit égal à une des petites pyramides, les deux prismes seroient la moitié de la grande pyramide. Or ils sont chacun plus grands qu'une des pyramides; comme le prisme GHE, contient une pyramide GBHI, qui n'en est que partie; & cette pyramide est égale & semblable aux autres, ayant tous ses Triangles égaux & semblables à ceux qui composent les autres pyramides, comme l'on peut facilement prouver par le parallelisme de leurs côtez.

d'où je conclus que les deux prismes pris ensemble, sont plus grands que les deux pyramydes, & par consequent sont plus grands que la moitié de la grande pyramyde.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Si on divise deux pyramides triangulaires, de même hauteur, en deux prismes, & deux pyramides, & que ces deux pyramides soient soûdivisées de la même façon : tous les prismes d'une pyramide auront même raison à tous ceux de l'autre, que la base d'une pyramide à la base de l'autre.

SI l'on divise les deux pyramides ABCD, DEFG de même hauteur, & de base triangulaire, en deux prismes, & en deux pyramides, selon la methode de la Proposition III. & si on soûdivise de la même façon les deux petites pyramides ; & ainsi consecutivement, de sorte qu'ayant fait autant de divisions dans l'une que dans l'autre, on ait le même nombre de prismes. Je dis que tous les prismes de l'une, à tous les prismes de l'autre, Pl. 1. Fig. 10. & 11.

auront même raiſon que les baſes.

Démonſtration.

Puiſque les pyramides ſont de même hauteur ; les priſmes produits par la premiere diviſion, auront auſſi même hauteur, puiſqu'ils ont chacun la moitié de celle de leur pyramide : Or les priſmes de même hauteur, ſont en même raiſon que leurs baſes (par le Corol. de la 39. du 11.) Les baſes BTV, EHX ſont ſemblables aux baſes BDC, EGF ; & ayant pour côtez, la moitié de ceux des grandes baſes, elles ne feront que le quart des grandes baſes ; ainſi elles ſeront en même raiſon que les grandes baſes. Donc les premiers priſmes auront même raiſon que les grandes baſes. Je prouverai de la même façon, que les priſmes produits par la ſeconde diviſion, c'eſt-à-dire, des petites pyramides, ſeront en même raiſon que les baſes des petites pyramides, leſquelles ſont en même raiſon que les grandes baſes. Donc tous les priſmes de l'une, ont même raiſon à tous les priſmes de l'autre, que la baſe, à la baſe.

USAGE.

Ces deux Propoſitions ont été néceſſaires, pour comparer les pyramides l'une avec l'autre, & pour les meſurer.

PROPOSITION V.

THEOREME.

Les pyramides triangulaires de même hauteur, sont en même raison que leurs bases.

Les pyramides ABCD, EFGH de même hauteur, sont en même raison que leurs bases: Car si cela n'étoit pas; une des pyramides, par exemple ABCD, auroit plus grande raison à la pyramide EFGH, que la base BCD à la base FGH. Ainsi une quantité L, plus petite que ABCD, auroit même raison à la pyramide EFGH, que la base BCD à la base FGH. Divisez la pyramide ABCD selon la façon de la troisiéme Proposition; divisez aussi les pyramides qui résulteront de la premiere division, en deux prismes, & deux pyramides; & celles-ci encore en deux autres prismes: continuez ainsi ces divisions, autant qu'il sera besoin: Puisque les prismes de la premiere division sont plus de la moitié de la pyramide ABCD (par la 3.) & que les prismes de la seconde division sont plus de la moitié du reste; c'est-à-dire, de deux petites pyramides, que ceux de la troisiéme division sont plus de la moitié du reste; il est évi- Pl. 1. Fig. 12. 13. & 14.

dent qu'on fera tant de divisions, que ce qui restera sera plus petit, que l'excès de la pyramide ABCD par-dessus la quantité L ; c'est-à-dire, que tous les prismes étant mis ensemble, seront plus grands que la quantité L. Faites autant de divisions dans la pyramide EFGH, de sorte que vous ayez autant de prismes qu'il y en a dans ABCD.

Démonstration.

Les prismes de ABCD ont même raison aux prismes de EFGH, que de la base BCD à la base FGH : Or la raison de la base BCD à la base FGH, est la même que celle de la quantité L à la pyramide EFGH : il y a donc même raison des prismes de ABCD aux prismes de EFGH, que de la quantité L à la pyramide EFGH. De plus, les prismes de ABCD sont plus grands, que la quantité L : Donc (par la 4. du 5.) les prismes compris dans la pyramide EFGH, seroient plus grands que la même pyramide EFGH ; ce qui est évidemment faux, la partie ne pouvant être plus grande que le tout. Il faut donc avoüer qu'une quantité plus petite que l'une des pyramides, ne peut avoir même raison à l'autre, que la base à la base ; & par consequent aucune des pyramides n'a plus grande raison à l'autre, que la base à la base.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Toutes sortes de pyramides de même hauteur, ont même raison que leurs bases.

LES pyramides ABC, DEFG, de même hauteur sont en même raison que les bases BC, EFG. Divisez les bases en Triangles.

Démonstration.

Les pyramides triangulaires AB, DE, de même hauteur sont en même raison que leurs bases (par la 5.) Pareillement, les pyramides triangulaires AC, DF sont en même raison que leurs bases. Il y aura donc même raison de la pyramide ABC à la pyramide DEF, que de la base BC à la base EF (par la 3. du 5.) De plus, puisqu'il y a même raison de la pyramide DEF à la pyramide ABC, que de la base EF à la base BC : & qu'il y a encore même raison de la pyramide DG à la pyramide ABC, que de la base G à la base BC ; il y aura aussi même raison de la pyramide DEFG à la pyramide ABC, que de la base EFG à la base CB. Pl. 1. Fig. 15. & 16.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

Toute pyramide est la troisiéme partie d'un prisme de même base & de même hauteur.

Pl. 1. Fig. 17. QU'ON propose premierement un prisme triangulaire AB : Je dis qu'une pyramide qui aura pour base un des Triangles ACE, DBF, & qui sera de même hauteur, comme la pyramide ACEF, sera la troisiéme partie du prisme. Tirez les trois diagonales AF, DC, FC, des trois parallelogrames.

Demonstration.

Le prisme est divisé en trois pyramides égales ACFE, ACFD, CFDB : Donc chacune sera la troisiéme partie du prisme. Les deux premieres ayant pour bases les Triangles AFE, AFD, qui sont égaux (par la 34. du 1.) & pour hauteur la perpendiculaire tirée de leur sommet C au plan AF de leurs bases, seront égales (par la précedente.) Les pyramides ACFD, CFBD, qui ont pour bases les Triangles égaux ADC, DCB ; & le même sommet F, seront aussi égales ; (par la précedente.) Donc une de ces pyramides, par exemple,

AFEC, qui a la même base ACE, que le prisme ; & la même hauteur, qui seroit la perpendiculaire tirée du point F, au plan de la base ACE ; est la troisiéme partie du même. Si le prisme étoit polygone, il le faudroit diviser en plusieurs prismes triangulaires : & la pyramide qui auroit la même base, & la même hauteur, seroit aussi divisée en autant de pyramides triangulaires ; chacune desquelles seroit la troisiéme partie de son prisme. Donc (par la 12. du 5.) la pyramide polygone sera la troisiéme partie du prisme polygone.

SCOLIE.

On auroit pû ometre les six Propositions precedentes, parce qu'elles semblent ne servir que pour celle-ci ; laquelle se peut démontrer immediatement & tres-facilement, par le Theoreme IV. de la Planimetrie de Monsieur Ozanam.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

Les pyramides semblables, sont en raison triplee ou comme les cubes de leurs cotez homologues.

SI les pyramides sont triangulaires, on peut achever les prismes, qui seront

troisiéme partie de la hauteur de la pyramide, le prisme & la pyramide seront égaux.

LEMME.

Si on propose une quantité plus petite qu'un Cylindre, on pourra inscrire dans le Cylindre un prisme polygone, plus grand que cette quantité.

Pl. 1. Fig. 18. & 19. *SI la quantité A est plus petite, que le Cylindre qui a le Cercle B pour base; on pourra inscrire dans ce Cylindre un prisme polygone plus grand que la quantité A. Le quarré CDEF est inscrit, GHIK est circonscrit, CLDMENFO est un octogone. Tirez la Tangente PLq, & continuez les côtez ED, FC en P & q, imaginez-vous autant de prismes de même hauteur que le Cylindre, qui ont pour bases ces polygones. Celui qui a pour base le quarré circonscrit, entoure le Cylindre; & celui qui est sur le quarré inscrit, est aussi inscrit dans le Cylindre.*

Démonstration.

Les prismes de même hauteur, sont en même raison que leurs bases (par le 3 Corol.

Corol. de la 39. du 11. & le quarré inscrit étant la moitié du circonscrit, son prisme sera la moitié de l'autre : il sera donc plus de la moitié du Cylindre. Faisant un prisme qui ait l'octogone pour base, on ôte plus de la moitié de ce qui reste du Cylindre, ayant ôté le prisme du quarré inscrit ; parce que le Triangle CLD est la moitié du rectangle Cq : & puisque les prismes de même hauteur sont en même raison que leurs bases, le prisme qui a pour base le Triangle CLD, sera la moitié du prisme du rectangle DCPq ; il sera donc plus de la moitié de la partie du Cylindre qui a pour base le segment DLC. Il en est de même des autres segmens. Je démontre de la même façon ; que faisant un prisme polygone de seize côtez, j'ôte plus de la moitié de ce qui reste du Cylindre, ayant ôté le prisme octogone ; ainsi il restera une partie du Cylindre plus petite, que l'excès du Cylindre par-dessus la quantité A. Nous aurons donc un prisme inscrit dans le Cylindre, qui sera moins surpassé par le Cylindre, que la quantité A ; c'est-à-dire, qui sera plus grand que la quantité A. On peut raisonner de la même façon touchant les pyramides inscrites dans un Cone.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Un Cone est la troisiéme partie d'un Cylindre de même base & de même hauteur.

Pl. 1. Fig. 20. & 21. SI un Cone & un Cylindre ont le Cercle A pour base, & la même hauteur; le Cylindre sera triple du Cone. Car si le Cylindre avoit plus grande raison au Cone, que triple; une quantité B moindre que le Cylindre, auroit la même raison au Cone, que trois à un: & (par le Lemme préced.) on pourroit inscrire dans le Cylindre, un prisme polygone plus grand que la quantité B. Supposons que c'est celui qui a pour base le polygone CDEFGH. Faites aussi sur la même base, une pyramide inscrite dans le Cone.

Démonstration.

Le Cylindre, le Cone, le Prisme & la Pyramide sont de même hauteur: donc le Prisme est triple de la Pyramide (par la 7.) Or la quantité B est aussi triple du Cone; il y a donc même raison du Pris-

me à la pyramide, que de la quantité B au Cone: & (par la 14. du 5.) puiſque le Priſme eſt plus grand que la quantité B la pyramide ſeroit plus grande que le Cone dans lequel elle eſt inſcrite, ce qui ne peut être.

Que ſi on diſoit que le Cone a plus grande raiſon au Cylindre, que d'un à trois, on peut ſe ſervir de la même methode pour démontrer le contraire.

PROPOSITION XI.

THEOREME.

Les Cylindres & les Cones de même hauteur, ſont en même raiſon que leurs baſes.

ON propoſe deux Cylindres, ou deux Cones de même hauteur, qui ont les Cercles A & B pour leurs baſes: Je dis qu'ils ſont en même raiſon que leurs baſes. Car s'ils ne ſont pas en même raiſon; l'un d'eux, par exemple A, aura plus grande raiſon au Cylindre B, que la baſe A à la baſe B: ainſi une quantité L, plus petite que le Cylindre A, aura même raiſon au Cylindre B, que la baſe

Pl. 1. Fig. 22. 23. & 24.

A à la base B. On pourra donc inscrire un prisme polygone dans le Cylindre A, plus grand que la quantité L. Que ce soit celui qui a pour base le polygone CDEF; & qu'on inscrive un semblable polygone GHIK, dans la base B, qui serve de base au prisme de même hauteur.

Démonstration.

Les prismes de A, & de B, sont en même raison que leurs bases polygones (par le Corol. 3. de la 39. de la 11.) & les polygones sont en même raison que les Cercles (par le Corol. de la 2.) ainsi le prisme A sera en même raison au prisme B, que le Cercle A au Cercle B. Or comme le Cercle A est au Cercle B, ainsi la quantité L est au Cylindre B: donc, comme le prisme A est au prisme B, ainsi la quantité L est au Cylindre B. Le prisme A est plus grand que la quantité L: par consequent (suivant la 4. du 5.) le prisme B inscrit dans le Cylindre B, seroit plus grand que lui, ce qui ne peut être. Donc aucun des Cylindres n'a pas plus grande raison à l'autre, que celle de sa base à l'autre base.

Corollaire. Les Cylindres sont triples des Cones, de même hauteur & de même base: Donc les Cones de même hauteur sont en même raison que leurs bases.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

Les Cylindres & les Cones semblables, sont en raison triplée, de celles des diametres de leurs bases.

QU'ON propose deux Cylindres, ou deux Cones semblables, qui ayent les Cercles A & B pour bases. Je dis que la raison du Cylindre A au Cylindre B, est en raison triplée de celle du diametre DC au diametre EF. Car s'il n'a pas une raison triplée: que la quantité G, plus petite que le Cylindre A, ait au Cylindre B, une raison triplée de celle du diametre DC au diametre EF; & qu'on inscrive un prisme dans le Cylindre A qui soit plus grand que G, & un autre semblable dans le Cylindre B, ils seront aussi hauts que les Cylindres; car les Cylindres semblables, ont les hauteurs & les diametres des bases proportionnels, aussi bien que les prismes, (par la défin. 11. de l'11.) Pl. 12. Fig. 25. & 26.

Démonstration.

Le diametre DC a même raison au dia-

metre EF, que le côté DI au côté EL. Or les prismes semblables sont en raison triplée des côtez homologues (par le 4. Cor. de la 39. du 11.) donc le prisme de A au prisme de B, est en raison triplëe de DC à EF. Nous avons supposé que la quantité G, eu égard au Cylindre B, étoit en raison triplée du diametre DC, au diametre EF. Ainsi il y aura même raison du prisme A au prisme B, que de la quantité G au Cilindre B, & (par la 4. du 5.) puisque le prisme A, est plus grand que la quantité G, le prisme B, c'est-à-dire, décrit dans le Cylindre B, seroit plus grand que le même Cylindre; ce qui est impossible. Donc les Cylindres semblables sont en raison triplée des diametres de leurs bases.

Secondement. Les Cones sont les troisiémes parties des Cylindres (par la 10.) Donc les Cones semblables sont en raison triplée de celle des diametres de leurs bases.



PROPOSITION XIII.

THEOREME.

Si un Clindre est coupé par un plan parallele à sa base, les parties de l'essieu seront en même raison que les parties du Cylindre.

QUE le Cylindre AB soit coupé par le plan DC, parallele à sa base. Je dis qu'il y aura même raison du Cylindre AF au Cylindre FB, que de la ligne AF à la ligne FB. Tirez la ligne BG, perpendiculaire au plan de la base A : tirez aussi dans les plans des Cercles DC, & A, les lignes FE, AG. Pl. 2. Fig. 27.

Demonstration.

Le plan du Triangle BAG, coupe les plans paralleles A & DC : donc les sections FE, AG sont paralleles, par le 16. du 11.) Ainsi il y a même raison de AF à FB, que des hauteurs GE à EB. Qu'on prenne une partie aliquote de EB; & ayant divisé GE & EB, en des parties égales à cette partie aliquote qu'on tire des plans paralleles à la base A : Vous aurez autant de Cylindres de même hauteur, lesquels ayant des bases & des hauteurs égales, seront égaux (par la 11.) De plus, les lignes

AF & FB seront divisées de même façon que EG, EB (par la 17. du 11.) ainsi la ligne AF contient autant de fois la partie aliquote de la ligne FB, que le Cylindre AF contient une semblable partie aliquote du Cylindre FB. Il y a donc même raison des parties du Cylindre, que des parties de l'essieu.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

Les Cylindres & les Cones de même base, sont en même raison que les hauteurs.

Pl. 2. Fig. 28. & 29. DEux Cylindres AB, CD de bases égales étant proposés; coupez dans le plus grand, un Cylindre de même hauteur que le petit, tirant un plan EF parallele à sa base. Il est évident que les Cylindres CF, AB sont égaux (par la 11.) & que CF à CD, a même raison que GI à GH, ou (par le Corol. de la préced.) que la hauteur de CE à la hauteur de CD: il y a donc même raison de AB à CD, que de la hauteur de CE ou AB, à la hauteur de CD.

Pour les Cones, puisqu'ils sont les troisiémes parties des Cylindres; s'ils ont des bases égales, ils seront aussi en même raison que les hauteurs.

PRO-

PROPOSITION XV.

THEOREME.

Les Cilindres, & les Cones égaux, ont les bases & les hauteurs réciproques: & ceux qui ont les bases & les hauteurs réciproques, sont égaux.

SI les Cylindres AB, CD sont égaux; il y aura même raison de la base B à la base D, que de la hauteur CD à la hauteur AB. Que la hauteur DE soit égale à la hauteur AB. Pl. 2. Fig. 30. & 31.

Démonstration.

Il y a même raison du Cylindre AB, au Cylindre DE, de même hauteur que de la base B à la base D (par la 11.) Or comme le Cylindre AB est au Cylindre DE; ainsi le Cylindre CD égal à AB, est au Cylindre DE; c'est-à-dire, ainsi la hauteur CD, est à la hauteur AB ou DE. Donc comme la base B est à la base D: ainsi la hauteur CD est à la hauteur AB.

Secondement. S'il y a même raison de la base B à la base D, que de la hauteur CD à la hauteur AB; les Cylindres AB, CD seront égaux. Car le Cylindre AB est au Cylindre DE, comme la base B à la ba-

se D:& le Cylindre CD, aura même raison au Cylindre DE, que CD à DE: il y aura donc même raison du Cylindre AB au Cylindre DE, que du Cylindre CD, au même Cylindre DE, & (par la 9. du 5.) les Cylindres AB & CD seront égaux.

Les Propositions 16. & 17. sont fort difficiles, & ne servent que pour la 18. que je démontrerai plus facilement par les Lemmes suivans.

LEMME I.

Si on propose une quantité plus petite, qu'une Sphere; on pourra inscrire dans la même Sphere, des Cylindres de même hauteur, plus grands que cette quantité.

Pl. 2. Fig. 32. 33. & 34. *QUe ABC soit un grand demi-Cercle de la Sphere, de laquelle il s'agit, & que la quantité D soit plus petite que la même Sphere; je dis qu'on lui pourra inscrire des Cylindres de même hauteur, lesquels pris ensemble seront plus grands que la quantité D. Car si la demi-Sphere surpasse la quantité D, elle la surpassera de quelque grandeur; que cette grandeur soit le Cylindre Mp. De sorte que les quantitez*

D & MP prises ensemble, soient égales a la demi-Sphere. Faites qu'il y ait même raison d'un grand Cercle de la Sphere à la base MO, que de la hauteur MN à la hauteur MR. Divisez la ligne EB, en tant de parties égales que vous voudrez, chacune plus petite que MR: & tirant des paralleles à la ligne AG, décrivez des parallelogrames inscrits & circonscrits. Le nombre des circonscrits surpassera d'une unité celui des inscrits. Or tous les rectangles circonscrits surpassent les inscrits, par les petits rectangles, par lesquels la circonference du Cercle passe, & tous ces petits rectangles pris ensemble, sont égaux au rectangle AL. Imaginez-vous qu'on fait rouler le demi-Cercle autour du diametre AC, le demi-Cercle décrira une demi-Sphere, & les rectangles inscrits décriront des Cylindres inscrits dans la demi-Sphere, & les circonscrits décriront des autres Cylindres.

Démonstration.

Les Cylindres circonscrits surpassent davantage les inscrits, que la demi-Sphere ne surpasse les mêmes Cylindres inscrits, puisqu'elle est renfermée dans les Cylindres circonscrits. Or les circonscrits surpassent les inscrits du Cylindre AL: donc la demi-Sphere surpassera moins les Cylindres ins-

crits, que du Cylindre décrit par le rectangle AL. Ce Cylindre AL est plus petit que le Cylindre MP : car il y a même raison d'un grand Cercle de la Sphere qui sert de base au Cylindre AL à la base MO, que de MN à MR : ainsi (par la préced.) un Cylindre qui auroit pour base un grand Cercle de la Sphere, & la hauteur MR seroit égal au Cylindre MP. Or le Cylindre AL sous la même base, à une hauteur CL plus petite que MR : donc le Cylindre AL est plus petit que le Cylindre MP. Par conséquent la demi-Sphere qui surpasse la quantité D, par le Cylindre MP ; & les Cylindres inscrits par une quantité moindre que AL ; surpasse moins les Cylindres inscrits, que la quantité D. Donc la quantité D, est plus petite que les Cylindres inscrits.

Ce que j'ai dit d'une demi-Sphere, se peut appliquer à une Sphere entiere.

LEMME II.

Les Cylindres semblables inscrits dans deux Spheres, sont en raison triplée des diametres de la Sphere : c'est-à-dire, comme les cubes de leurs diametres.

Pl. 2. Fig. 31. *SI les deux Cylindres semblables CD, EF, sont inscrits dans les Spheres A, B,*

ils seront en raison triplée des diametres LM, NO. Tirez les lignes GD, IF.

Démonstration.

Les Cylindres droits CD, EF sont semblables : ainsi il y a même raison de HD à DR, que de QF à FS ; comme aussi il y aura même raison de KD a KG, que PF à PI. Par consequent les Triangles GDK, IFP sont semblables (par la 6. du 6.) ainsi il y aura même raison de KD à PF, que de GD à IF, ou LM à ON. Or les Cylindres semblables CD, EF sont en raison triplée de KD à PF, demi-diametres de leurs bases, (par la 12.) donc les Cylindres semblables CD, EF, inscrits dans les Spheres A & B, sont en raison triplée des diametres des Spheres.

PROPOSITION XVIII.

Les Spheres sont en raison triplée de leurs diametres ; c'est-à-dire comme les cubes de leurs diametres.

LEs Spheres A & B sont en raison triplée de celles des diametres CD, EF. Car si elles ne sont pas en raison triplée, une des Spheres, comme A, sera en plus grande raison que triplée de celle de CD Pl. 2. Fig. 36.

à EF : donc une quantité G plus petite que la Sphere A, sera en raison triplée de celle de CD à EF : ainsi on pourra (selon le premier Lemme) inscrire dans la Sphere A, des Cylindres de même hauteur plus grands que la quantité G. Qu'on inscrive dans la Sphere B, autant de Cylindres semblables à ceux de la Sphere A.

Démonstration.

Les Cylindres de la Sphere A, à ceux de la Sphere B, seront en raison triplée de celle de CD à EF : Or la quantité G, eu égard à la Sphere B, est en raison triplée de celle de CD à EF : il y a donc même raison des Cylindres de la Sphere A, aux Cylindres semblables de la Sphere B ; que de la quantité G à la Sphere B. Ainsi les Cylindres A étant plus grands que la quantité G, les Cylindres B, c'est-à-dire, inscrits dans la Sphere B, seroient plus grands que la Sphere B, ce qui est impossible. Donc les Spheres A & B sont en raison triplée de celle de leurs diametres.

Corollaire. Les Spheres sont en même raison que les cubes de leurs diametres ; puisque les cubes étant des solides semblables, sont en raison triplée de leurs côtez (par la 33. du 11.)

AVERTISSEMENT.

Ce qu'Euclide dit de la Sphere dans ce 12. Livre, ne suffit pas pour en faire voir les proprietés, c'est pourquoi j'ai crû faire plaisir aux commençans en leur donnant les Propositions suivantes, dans lesquelles je les explique.

LEMME III.

La superficie de tout polygone regulier, est égale à celle d'un Triangle, qui a pour base le circuit ou perimetre du polygone, & pour hauteur la perpendiculaire tirée du centre du polygone sur un de ses côtez.

SI la base FC du Triangle EFG, est composée de huit parties égales, & que chacune de ses parties soit égale à un des côtez BC du polygone; & que ce polygone soit composé de huit côtez égaux, le circuit de ce polygone sera égal à la base FG du Triangle, & si la hauteur EH du Triangle, est égale à la perpendiculaire AD; je dis que le Triangle EFG, est égal au polygone. Pour le Pl. 3. Fig. 1. & 3.

démontrer, considerez que si du centre A du polygone, on a tiré une ligne dans chacun des angles de ce polygone, on aura autant de Triangles égaux comme ce polygone a de côtez; & si du sommet E du Triangle EFG, on tire des lignes à l'extrêmité des parties égales de la base qui sont les côtez du polygone, on aura autant de Triangles comme il se trouve de parties dans la base; or comme tous ces Triangles ont tous des bases égales, & la même hauteur EH: il s'ensuit qu'il y a autant de Triangles égaux dans le seul Triangle EFG, comme il s'en trouve dans le polygone. Donc il s'ensuit que le polygone A, est égal au Triangle EFG.

Pl. 1. Fig. 2. Maintenant si l'on considere qu'un Cercle tel que X, est un polygone d'une infinité de côté, dont la somme est égale à la circonference du Cercle; il est évident, par ce que nous venons de dire, que si la base BC du Triangle ABC, est égale à la circonference du Cercle, & que sa hauteur AB soit le rayon, que la superficie du Triangle est égale à celle du Cercle; d'où je conclus que la superficie d'un Cercle est égale à celle d'un Triangle, qui a pour base la circonference du Cercle, & pour hauteur le rayon.

LEMME IV.

Quand la hauteur d'un Cylindre est égale au diametre du Cercle de sa base, la surface de ce Cylindre est quadruple de celle du Cercle de sa base.

ON sçait que la surface de tout Cylindre est égale à un rectangle, qui a pour base la circonference du Cercle qui sert de base au Cylindre, & pour hauteur celle du Cylindre. Cela étant, je dis que si la hauteur CB du Cylindre H, est égale au diametre AB du Cercle de sa base, que la surface de ce Cylindre sera quadruple de celle du Cercle qui sert de base à ce Cylindre, c'est-à-dire, du Cercle, dont AB est le diametre. Pour le prouver, supposons que le rectangle FE, ait sa base DE égale à la circonference du Cercle, dont AB est le diametre, & que sa hauteur FD soit égale à celle du Cylindre; cela étant, le diametre AB sera égal à la hauteur FD, & le rectangle FE sera égal à la surface du Cylindre: or si l'on divise la ligne droite FD en deux également au point G, & qu'on tire une ligne de G en E, le Triangle GDE, sera Pl. 5. Fig. 4. & 5.

égal au Cercle qui sert de base au Cylindre, puisque DE est égal à sa circonference, & que GD est égal au rayon par le Lemme précedent : or comme ce Triangle n'est que le quart du rectangle FE ; il s'ensuit que puisque le rectangle FE, est égal à la surface du Cylindre, que la surface du Cylindre est quadruple de celle du Cercle de sa base.

LEMME V.

La surface d'une pyramide droite, est égale à celle d'un Triangle, qui a pour base une ligne égale au circuit de la base de la pyramide, & pour hauteur une ligne égale à la perpendiculaire, tirée du sommet de la pyramide sur un des côtez du polygone de la base.

Pl. 3. Fig. 6. & 7. SOit la pyramide X, qu'on suppose avoir pour base un hexagone régulier; cela étant, la surface de cette pyramide sera composée d'autant de Triangles ABC, comme il y a de côtez dans la base, c'est-à-dire, elle sera composée de six Triangles isosceles, qui auront chacun pour hauteur la ligne AD ; mais comme ces six Triangles sont égaux à un seul, qui au-

roit pour base la somme de toutes les bases, & pour hauteur la ligne AD ; il s'ensuit donc que la surface d'une pyramide est égale à celle d'un Triangle, qui a pour base le circuit du polygone qui lui sert de base, & pour hauteur la perpendiculaire tirée du sommet de la pyramide sur un des côtez du polygone de la base.

Or comme les Cones ont des Cercles pour bases, & que ces Cercles peuvent être considerés comme des polygones d'une infinité de côtez, on peut dire de même que la surface d'un Cone tel que ADE, est égale à un Triangle AHK, dont la base HK est égale au Cercle, dont DE est le diametre, & dont la hauteur FH est égale à la ligne AD. J'ajoûterai encore que si le Cone ADE étoit tronqué, que la surface de la partie tronquée BCDE, est égale au trapeze NOKH, pourvû que la hauteur NH soit égale à la ligne BD de la partie tronquée du Cone ; cela est trop clair pour demander de plus grandes démonstrations. Pl. 3. Fig. 7. & 8.

LEMME VI.

SI l'on divise la hauteur FH du Triangle rectangle FHK, qui peut passer Pl. 3. Fig. 8.

pour la surface d'une pyramide en deux également, au point C, & qu'on tire à la base HK la parallele CD, le rectangle compris sous FH & CD, sera égal au Triangle FHK, ce qui est bien évident; car puisque les deux Triangles FCD & FHK sont semblables, le côté FC étant la moitié du côté FH, CD sera la moitié de la base HK.

Pl. 3. Fig. 9. J'ajoûterai encore que si l'on divise en deux également au point L, la hauteur NH du trapeze NOHK, & que du point L, on tire la parallele LM à la base HK, que le rectangle compris sous NH & LM, sera égal au trapeze NOKH; par consequent à la surface du Cone tronqué BCDE, ce qui s'entendra aisément, si l'on considere que le Triangle MQK, est égal au Triangle OPM.

Définition.

Pl. 3. Fig. 10. Spheroïde est un solide formé par la circonvolution d'un polygone régulier sur son diametre; ainsi si l'on imagine que le Décagone Z, est tourné autour de son diametre FA, on aura un solide qui sera composé de plusieurs autres; car le Triangle isoscele EFG, aura décrit un Cone, le trapeze DEGH, aura décrit un Cone tronqué, & le rectangle CDHI, aura décrit un Cylindre.

AVERTISSEMENT.

Avant de lire le Theoreme suivant, il est bon de faire attention que tout polygone régulier circonscrit autour d'un Cercle, touche le Cercle à chacun de ses côtez, & que le point où le Cercle touche, chaque côté du polygone est au milieu de ce côté, ceci doit s'être remarqué dans le 4. Livre.

THEOREME XIX.

Chaque surface des portions d'un Spheroïde est égale au rectangle, fait de la partie de l'axe à laquelle elle répond, & de la circonference du grand Cercle de la Sphere inscrite dans ce Spheroïde,

IL faut s'imaginer que le Décagone Z, & le Cercle autour duquel il est circonscrit ont fait une circonvolution autour de l'axe FA, le polygone décrira un Spheroïde, & le Cercle une Sphere, qui se trouvera inscrite dedans ce poliedre; cela posé, je dis que la surface de la partie EFG, qui est un Cone, est égale au rectangle compris sous la partie de l'axe FN, & sous la circonference du Cercle, dont Pl. 11 Fig. 10

LM est le rayon, qui est aussi celui de la Sphere; de même la surface de la partie DEGH, qui est un Cone tronqué, est égale au rectangle compris sous la partie de l'axe NO, & sous la circonference du Cercle, dont LM est le rayon; & enfin que la surface de la partie CDHI est égale au rectangle compris de OP, & du Cercle, dont LM est le rayon.

Démonstration.

Pour la Partie de CDHI.

Comme cette partie est un Cylindre, & que la ligne LM est égale au demi-diametre du Cercle qui lui sert de base, il n'y a point de doute que la surface de la partie DHIC, ne soit égale au rectangle de OP, & de la circonference, dont LM est le rayon.

Démonstration.

Pour la Partie de DEGH.

Pl. 3. Fig. 12. Afin de ne point embroüiller la figure, j'ai rapporté cette partie en particulier, aussi bien que l'autre EFG, afin de rendre les demonstrations plus claires; ainsi dans la figure douziéme, je partage ce Cone tronqué par la moitié, menant CM parallele à FK & à EL; je mene aussi GE parallele à KL, à laquelle elle est égale. Les Triangles EFG & ACD sont rectangles, ainsi les angles GFE & GEF valent

un droit, l'angle GFE étant donc égal à l'angle FCD, puisqu'ils sont alternes, retranchant de l'angle droit FCA, l'angle FCD, le reste DCA, sera égal à GEF; ainsi les deux Triangles ACD & EFG sont équiangles: donc GE ou KL, EF :: CD, CA, partant KL est à EF, comme le double de CD, qui est CM, est au double de AC, qui est CN; or les lignes CM, CN, prises comme diametres, sont entr'elles comme les circonferences des Cercles, dont elles sont diametres; donc le rectangle fait de GE, & de la circonference d'un Cercle, dont CN est le diametre, est égal au rectangle fait de EF, & de la circonference d'un Cercle dont CM est diametre, auquel est égale la surface du fragment de Cone; ce rectangle, dis-je, est égal à un rectangle fait de KL par la circonference d'un Cercle, dont CM est le diametre. Ce qu'il falloit prouver.

Démonstration.

Pour la partie de FEG.

Présentement dans la figure treiziéme, la surface du Cone DBG, par le Lemme V. est égale à un Triangle rectangle, dont BD est la hauteur, & la base la circonference d'un Cercle, dont DG est le diametre; partant à un parallelograme rectan- Pl. 31. Fig. 13.

gle, dont BD est la hauteur, & la base est la circonference d'un Cercle, dont DE est le diametre, par le Lemme VI. ainsi il faut prouver que le rectangle de BD, par la circonference du Cercle, dont DE est diametre, est égal au rectangle de BE, par la circonference du Cercle, dont DF est le diametre.

Les deux Triangles DEF & DEB sont semblables: donc BD, BE : : DF, DE, or DF est à DE, comme les circonferences des Cercles, dont ils sont les diametres; partant le rectangle de BE, par la circonference du Cercle, dont DE est le diametre, est égal au rectangle de BE, par la circonference du Cercle, dont DF est le diametre. Ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XX.

La surface d'un Spheroïde est égal au rectangle fait de son axe par la circonference du Cercle, ou Sphere qui lui est inscrite.

PAR le Theoreme précedent, puisque la surface de chaque partie du Spheroïde, est égale au rectangle fait de chaque partie de son axe à laquelle elle répond, & de la circonference du Cercle

cle ou Sphere, qui lui est inscrite, toute la surface entiere sera égale au rectangle de tout l'axe par la circonference du Cercle ou Sphere qui lui est inscrite, puisque le tout & ses parties sont un produit égal, quand ils sont multipliés par une même grandeur.

THEOREME XXI.

La surface d'une Sphere est égale au rectangle de son axe par la circonference d'un Cercle, qui a même diametre que cette Sphere.

CAR on sçait que la Sphere est formée par la révolution d'un demi-Cercle, sur son diametre comme axe; or par le III. Lemme, le Cercle peut être consideré comme un polygone régulier d'une infinité de côtez, ainsi par la définition du Spheroïde, la Sphere est un Sphéroïde d'une infinité de côtez, dont l'axe par consequent est égal à l'axe ou diametre de la Sphere; ainsi puisque par le précedent Theoreme, la surface du Spheroïde est égale au rectangle fait de son axe par la circonference d'un Cercle, dont le diametre est celui de la Sphere:

qui lui est inscrite, la surface de cette Sphere sera égale de même au rectangle fait de son axe, & de la circonference d'un Cercle, qui a même diametre que cette Sphere. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XXII.

La surface d'une Sphere est égale à celle du contour d'un Cylindre où elle est inscrite, qui a même hauteur que son axe.

Pl. 3. Fig. 14. LA surface de la Sphere AMCN, est égale à un rectangle fait de son axe, par la circonference du Cercle fait sur son diametre MN. Or la surface du Cylindre où cette Sphere est inscrite, dont les côtez DP, EQ sont égaux à AC, qui est l'axe de cette Sphere est égale à ce même rectangle; car comme on l'a pû remarquer, elle est égale au rectangle fait de PD, par la circonference du Cercle de sa base, qui a pour diametre PQ, égal à MN, puisque le diametre d'une Sphere inscrite dans un Cylindre, doit être égal à celui de la base du Cylindre, selon l'idée qu'on a des figures inscrites.

Or puisque la surface de la Sphere est égale à celle du Cylindre dans lequel elle

est inscrite, & que cette surface de Cylindre est quadruple du Cercle de sa base; il s'ensuit que la surface d'une Sphere sera quadruple de celle de son grand Cercle, puisque ce Cercle est le même que celui qui sert de base au Cylindre, où la Sphere est inscrite.

THEOREME XXIII.

Si on coupe une Sphere inscrite dans un Cylindre par des plans perpendiculaires à son axe, la surface de chaque partie de la Sphere est égale à celle de la partie du Cylindre qui lui répond.

On voit que AC axe de la Sphere, est la hauteur du Cylindre où la Sphere est inscrite, ainsi ce Cylindre touche par ses deux bases cette Sphere, je coupe l'axe AC par des plans perpendiculaires sur lui, qui coupe aussi le Cylindre: je dis que la surface de la partie MHTN, est égale à celle de la partie MGFN du Cylindre, comme aussi la surface de HAT, à celle de EFGD.

Car on peut prendre cette Sphere pour un Sphéroïde, ainsi la partie MHTN, & HAT pour des portions de Spheroïde;

ainsi par le Theoreme 19. la surface de MHTN, est égale au rectangle BO, par la circonference d'un Cercle, dont MN est le diametre; auquel rectangle est égal la surface de FGMN, de même la surface de HAT, est égale au rectangle de AB, par la circonference d'un Cercle, dont GF est le diametre, auquel est égale la surface de la partie DEFG.

Par ce qui vient d'être dit dans les Propositions précedentes, on pourra connoître aisément la superficie d'une Sphere, parce qu'on trouve par approximation la circonference de son grand Cercle, qui est à son diametre, comme 7 est à 22, selon Archimede: & comme nous avons fait voir dans le III. Lemme, qu'un Cercle étoit égal à un Triangle, qui avoit pour base la circonference du Cercle, & pour hauteur le rayon, on connoîtra la surface de la Sphere, puisqu'elle est quatre fois celle de son grand Cercle: il nous reste maintenant à faire voir le rapport que la solidité d'une Sphere a avec celle d'un Cylindre, dans lequel elle seroit inscrite.

THEOREME XXIV.

Une Sphere est les deux tiers d'un Cylindre dans lequel elle est inscrite.

JE suppose que ABDC soit un Cylindre, dont la hauteur QE est le rayon d'une demie Sphere CQD inscrite, joint à cette demie Sphere inscrite dans ce Cylindre, est un Cone ABE, qui a pour base un Cercle, dont AB est le diametre, & pour axe la hauteur ou le rayon QE; cela posé, si le Cylindre, la Sphere, & le Cone sont coupés par un plan OP, parallele à la base CD, à quel point que ce soit de l'arc RC: Fig. 111.

Je dis que le Cercle pris dans le Cone, c'est-à-dire le Cercle, dont MN est le rayon, est égal à la couronne qui se trouve par la section, entre la surface du Cylindre, & celle de la Sphere; c'est-à-dire, à la couronne qui aura OL pour largeur. Pour éclaircir ceci, je dirai que couronne n'est autre chose que l'espace qui se trouve entre deux circonferences concentriques, par le moyen desquelles je veux prouver que le Cone ABE, qui est le tiers du Cylindre ABDC, est égal à

ce qui manque à la demie Sphere inscrite dans le Cylindre, pour valoir le Cylindre entier; pour faire cela, considerez que le rayon LE, qui est l'hypotenuse d'un Triangle rectangle LME, est égal à la ligne OM, & que, par la 47. du 1. les quarrez des côtez LM & ME, sont égaux au quarré du côté LE, & que par consequent le Cercle dont LE est le rayon, est égal aux cercles, dont l'un a pour rayon LM, & l'autre pour rayon ME; mais le Triangle MNE est isoscele, puisqu'il est semblable au Triangle AQE, par consequent le Cercle, dont MN sera le rayon, sera égal au Cercle, dont ME sera le demi-diametre.

Or comme le Cercle qui a pour rayon LM, ne peut être égal au Cercle, dont OM, ou LE, seroient les rayons, sans ajoûter la couronne OL, ou le Cercle, dont ME, ou MN seroit le rayon; il s'ensuit que la Couronne OL est égale au Cercle, dont NM seroit le rayon, qui est, comme vous voyez, un Cercle pris dans le Cone, ainsi l'on peut prouver de la même façon, que la partie du Cone RSE, est égale à l'espace TRC, compris entre la surface du Cylindre, & celle de la Sphere.

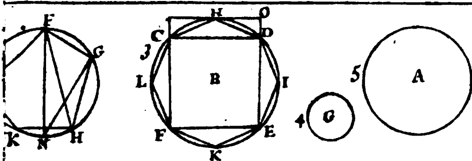
Or il ne reste plus qu'à démontrer que

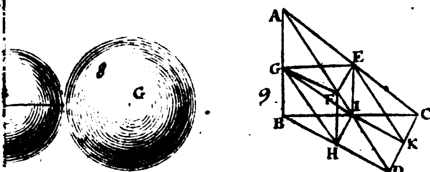
la partie de la Sphere RQS, est égale à l'espace ATR; pour cela il faut, comme ci-devant, faire attention que si le Cylindre, la demi-Sphere, & le Cone, sont coupés par un plan FV au-dessus du point R, que le Cercle dont HI seroit le demi-diametre, est égal à la couronne dont FK est la largeur. Pour le prouver, considerez que les lignes FI & HE sont égales, & que par consequent les Cercles dont elles sont les rayons, seront égaux entr'eux, aussi bien que les Cercles, dont les lignes KI & IE seroient les demi-diametres; cela étant, comme le Triangle HIE est rectangle, & que le Cercle dont IE, ou KI seroit le rayon, ne peut valoir le Cercle, dont HE, ou FI seroit le rayon sans la couronne FK, ou le Cercle, dont HI seroit le rayon : il s'ensuit donc que la couronne, dont FK est la largeur, sera égal au Cercle, dont HI seroit le rayon, la démonstration est la même pour tous les Cercles & les couronnes que pourroient former les sections prises dans tous les points de l'arc RQ: or comme je viens de faire voir que la demi-Sphere CQD, avec le Cone ABE, valent autant que le Cylindre ABCD; il s'ensuit que puisque le Cone ABE, est le tiers du Cylindre, la demi-Sphere CQD

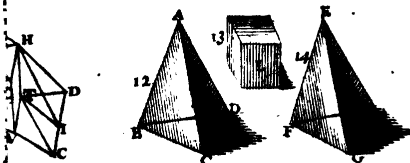
en sera les deux tiers, ce qui seroit la même chose à l'égard de la Sphere entiere, si elle étoit inscrite dans un Cylindre qui eût pour hauteur la ligne CD, qui est le diametre de la Sphere. Ce qu'il falloit démontrer.

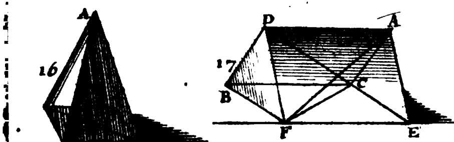
Il suit de-là que pour trouver la solidité d'une Sphere, il faut multiplier l'aire de son grand Cercle par les deux tiers du diametre de la Sphere.

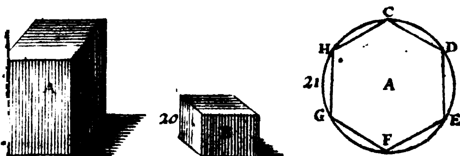
FIN.

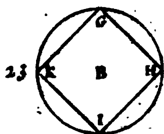

E
G
K
N
H
H
O
C
D
3
L
B
I
F
E
K
4
G
5
A

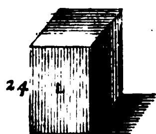

8
G
A
E
G
9
F
I
C
B
K
H
D

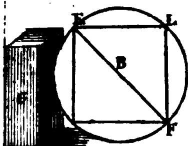

H
D
I
C
A
12
D
B
C
13
E
14
F

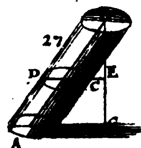

A
16
D
A
17
C
B
F
E


20
C
H
D
21
A
G
E
F

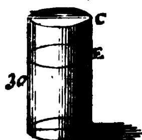

23
G
E
B
H
I

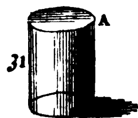

24


E
L
B
F

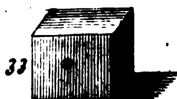

27
D
E
C
A




C
E
30

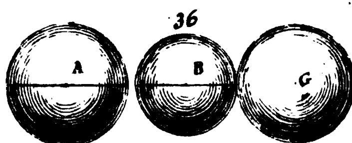

A
31


A


33


N
P
R
34
M


F
S
B


36
A
B
G

vre douzième Planche troisième.

